This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Math 5108.22

2 34 32

The Gift of
George W. Conklin
of
Cambridgeport,
18 Dec. 1861.

Digitized by Google

Die Elemente

der

Geometrie

systematisch,

zum Leitfaden beim Unterricht in Schulen

von

Friedrich Schmeißer

Dr. der Philosophie und Prorector am Gymnasio zu Frankfurth a. d. O.

z der Vorrede
n allgemeinen

Mit 2 Steintafeln.

Frankfurth a. d. O. 1822,

in der Hoffmannschen Buchhandlung.

Digitized by Google

~~32.34.32~~

~~Math 5093.1~~

Math 5108.22

1861. Dec. 18

Gift of

George W. Concklin

of Cambridgeport

Gedruckt bei Trowitzsch und Sohn
in Berlin.

Digitized by Google

Vorrede.

Der gegenwärtige Entwurf einer systematischen Anordnung der Materien und Lehrsätze der Elementargeometrie hat außer dem auf dem Titel gesagten Zwecke auch noch diesen, daß er gleichsam ein anfragender Vorläufer des zweiten Theils meines Lehrbuchs der reinen Mathesis ꝛc. Th. I. Berlin 1817 seyn soll, ebenso wie ich meinen mathematischen Arbeiten überhaupt jene kleine Schrift: Orthodidaktik der Mathematik ꝛc. Dresden 1813, vorausgehen ließ, wovon ich gegenwärtige als Fortsetzung betrachte.

Ueber „die gänzliche Regellosigkeit, welche im Vortrage der Mathematik herrscht," wie Herr Hofrath Thibaut sagt a), habe ich in der Vorrede zu meinem Lehrbuche Abschn. C. im allgemeinen bereits geredet. In der Geometrie ist sie aber größer, als in der Arithmetik. Denn in unsern bisherigen Lehrbüchern folgen die Materien zum Theil, besonders aber die Lehrsätze in einem so regellosen Gemische auf einander, daß man von dem einen

a) S. Grundr. d. allgem. Arithmet. ꝛc. Thl. 1. Götting. 1809 Vorr. S. IV.

Digitized by Google

zum andern kommt, ohne zu wissen wie, und keinen andern Grund davon sieht, als daß die Verfasser sie nur so zu demonstriren gewußt haben. Die natürliche Anordnung der Sätze, d. h. wie sie die Oekonomie der Wissenschaft und die Gesetze des menschlichen Erkenntnißvermögens fordern, findet sich in keinem bis jetzt mir bekannten Lehrbuche der Geometrie, sondern man ist gewohnt, die richtige Ordnung derselben der Möglichkeit der Beweise aufzuopfern. Die meisten Verfasser stützen sich auf die gewaltige Auctorität des Euklid, oder folgen abschreibend dem Beispiele ihrer Vorgänger in Wort und Form, als wenn es so seyn müsse; andere erklären in den Vorreden: die Sachen sollten zwar anders gestaltet seyn, aber sie hätten von dem Gewöhnlichen nicht abgehen wollen; andere in untergesetzten Noten: dieser oder jener Satz gehöre zwar gar nicht an den Ort, wo er stehe, aber er sei, zur Demonstration des folgenden nothwendig! Diese Gewohnheit würde wegen vermeinter Nothwendigkeit zu entschuldigen seyn, wenn nur dadurch dem vom gründlichen Mathematiker so oft beklagten Umstande abgeholfen würde, daß die ersten Sätze, besonders die Congruenz der Dreiecke, nur apagogisch bewiesen werden können, und man deshalb die Geometrie nicht auf direkte Beweise begründet sieht. Es kommt daher zu jener Regellosigkeit auch noch diese Ungründlichkeit.

Seit Jahren anher hat mein Nachdenken die

Digitized by Google

Frage beschäftiget, ob und auf welche Weise diesen Mängeln abgeholfen werden und die Sätze in ihrer natürlichen Ordnung mit Euklidischer Strenge, wie man sie nennt, direkt bewiesen werden können. Frei von unwürdigen Fesseln des Auctoritätsglaubens unternahm ich auch die Umarbeitung der Geometrie zu diesem Zwecke, welche als zweiter Theil meines Lehrbuchs bereits vollendet ist; und ich glaube jenem Zwecke nach Kräften Genüge geleistet zu haben. Den Lehrsätzen ist überdieß die Geschichte derselben, soviel als möglich, aus den Quellen selbst geschöpft, und unter dem Texte philosophisch-kritische Notizen beigefügt, wie in dem ersten. Auch geht wieder eine, wiewohl kürzere, Abhandlung voraus, welche 1) eine kritische Untersuchung über die Verfasser der sogenannten Euklidischen Elemente; 2) eine gründliche Beleuchtung der bisherigen Unordnung in der Geometrie nebst der Rechtfertigung meiner Anordnung der Sachen enthält. — Hätte ich nichts anders gethan, als die Verfasser unserer gewöhnlichen Lehrbücher, welche von Jahr zu Jahr sich häufen, und fast nichts weiter, als Abschriften von einander sind, so würde ich sehr weit entfernt seyn, die Menge derselben unnöthigerweise zu vermehren. Allein da meine Arbeit eine ganz andere Gestalt hat, wofür schon der erste Theil zum Beweise dienen könnte, so glaube ich durch die Herausgabe des zweiten nichts unnützes zu thun, zumal da mehrere Besitzer des ersten schon auf den zweiten

Digitized by Google

subscribirt haben. Um jedoch die Urtheile sachkundiger Männer vor der Herausgabe zu hören und benutzen zu können, schien es mir zweckmäßig, gegenwärtigen Auszug vorausgehen zu lassen, und zugleich zu eröffnen, daß Herr Buchhändler Hoffmann hier und alle solide Buchhandlungen durch ihn Subscriptionen auf den zweiten Theil, welcher ungefähr 24 Bogen gr. 8 enthält und 1½ Rthlr. kosten wird, gefälligst übernehmen will.

Wie ich aber einen Auszug aus dem wesentlichen Theile meines Buchs der Prüfung vorlege, so glaube ich hier auch noch etwas aus der vorgesetzten Abhandlung beifügen zu müssen. Meine Umarbeitung der Geometrie verstößt nämlich gegen die fast allgemeine Meinung, daß Euklid die Sätze so vollkommen zusammengestellt und bewiesen habe, daß die Ordnung derselben nicht ohne Nachtheil für die Strenge der Beweise anders gemacht werden könne. Allein daß die berühmten Elemente nicht vollkommen genannt werden können, liegt schon darin, daß die ersten Lehrsätze, worauf so viele andere gegründet sind, nur apagogisch, also unvollkommen bewiesen werden, — der von Petr. Ramus, von Robert Simson und vielen andern gerügten Mängel gar nicht zu gedenken. Und wenn man glaubt, Euklid habe die ganze Masse der Lehrsätze vor sich gehabt und sie in die 15 Bücher so gestellt, wie wir sie haben, so wird meine vorgesetzte Abhandlung hinlänglich beweisen, daß diese Meinung höchst un-

Digitized by Google

wahrscheinlich) um nicht zu sagen historisch ganz falsch sey, und daß Euklid, wenn er jenes gethan, mit unter sehr ungeschickt gehandelt hätte. Wie hätte der Verfasser der Data die Sachen so untereinander werfen können? wie z. B. Sätze ins 6te und 12te Buch verweisen können, welche im 1sten und 3ten stehen sollten? und dergl. — Dieses Urtheil widerspricht freilich dem Lobe des Proklus D., welches eine große Menge neuerer Schriftsteller nachgebetet und eine noch größere Menge Leser, welche die Quelle nicht prüften, geglaubt haben. Allein das Lob des Proklus kann uns hier nicht viel gelten; denn er sagt z. B. auch von den optischen Schriften des Euklid b), sie wären „voll bewundernswürdiger Genauigkeit und wissenschaftlicher Behandlung", da doch die Fehlerhaftigkeit derselben bekannt genug ist. — Eine auf äußere und innere Gründe gestützte Untersuchung hat mich dagegen überzeugt, daß jenes Musterwerk von mehrern Verfassern herrühre, und theils vor, theils zu, theils nach Euklid's Zeit (300 v. Ch.) abgefaßt sey.

Proklus zählt uns S. 19. die Erfinder und Vermehrer der Lehrsätze der Geometrie auf, und nennt den Hippokrates aus Chios (vielleicht

b) Die Stelle des Proklus (Basel. Ausg. S. 20.) heißt so: πολλα μεν και αλλα του ανδρος τουτου μαθηματικα συγγραμματα θαυμαστης ακριβειας και επιστημονικης δυναμεως μεστα. τοι συτα γαρ και τα οπτικα και κατοπτρικα.

2 34 32
Math 5108.22

The Gift of
George W. Conklin
of
Cambridgeport,
18 Dec. 1861.

Digitized by Google

Die Elemente

der

Geometrie

systematisch,

zum Leitfaden beim Unterricht in Schulen

von

Friedrich Schmeißer

Dr. der Philosophie und Professor am Gymnasio zu Frankfurth a. d. O.

...der Vorrede
...m allgemeinen

Mit 2 Steintafeln.

Frankfurth a. d. O. 1822,
in der Hoffmannschen Buchhandlung.

Digitized by Google

~~32.34.32~~

~~Math 5093.1~~

Math 5108.22

1861. Dec. 18

Gift of

George W. Concklin

of Cambridgeport

Gedruckt bei Trowitzsch und Sohn
in Berlin.

Digitized by Google

Vorrede.

Der gegenwärtige Entwurf einer systematischen Anordnung der Materien und Lehrsätze der Elementargeometrie hat außer dem auf dem Titel gesagten Zwecke auch noch diesen, daß er gleichsam ein anfragender Vorläufer des zweiten Theils meines Lehrbuchs der reinen Mathesis ꝛc. Th. I. Berlin 1817 seyn soll, ebenso wie ich meinen mathematischen Arbeiten überhaupt jene kleine Schrift: Orthodidaktik der Mathematik ꝛc. Dresden 1813, vorausgehen ließ, wovon ich gegenwärtige als Fortsetzung betrachte.

Ueber „die gänzliche Regellosigkeit, welche im Vortrage der Mathematik herrscht," wie Herr Hofrath Thibaut sagt a), habe ich in der Vorrede zu meinem Lehrbuche Abschn. C. im allgemeinen bereits geredet. In der Geometrie ist sie aber größer, als in der Arithmetik. Denn in unsern bisherigen Lehrbüchern folgen die Materien zum Theil, besonders aber die Lehrsätze in einem so regellosen Gemische auf einander, daß man von dem einen

a) S. Grundr. d. allgem. Arithmet. ꝛc. Thl. 1. Götting. 1809 Vorr. S. IV.

Digitized by Google

zum andern kommt, ohne zu wissen wie, und keinen andern Grund davon sieht, als daß die Verfasser sie nur so zu demonstriren gewußt haben. Die natürliche Anordnung der Sätze, d. h. wie sie die Oekonomie der Wissenschaft und die Gesetze des menschlichen Erkenntnißvermögens fordern, findet sich in keinem bis jetzt mir bekannten Lehrbuche der Geometrie, sondern man ist gewohnt, die richtige Ordnung derselben der Möglichkeit der Beweise aufzuopfern. Die meisten Verfasser stützen sich auf die gewaltige Auctorität des Euklid, oder folgen abschreibend dem Beispiele ihrer Vorgänger in Wort und Form, als wenn es so seyn müsse; andere erklären in den Vorreden: die Sachen sollten zwar anders gestaltet seyn, aber sie hätten von dem Gewöhnlichen nicht abgehen wollen; andere in untergesetzten Noten: dieser oder jener Satz gehöre zwar gar nicht an den Ort, wo er stehe, aber er sei, zur Demonstration des folgenden nothwendig! Diese Gewohnheit würde wegen vermeinter Nothwendigkeit zu entschuldigen seyn, wenn nur dadurch dem vom gründlichen Mathematiker so oft beklagten Umstande abgeholfen würde, daß die ersten Sätze, besonders die Congruenz der Dreiecke, nur apagogisch bewiesen werden können, und man deshalb die Geometrie nicht auf direkte Beweise begründet sieht. Es kommt daher zu jener Regellosigkeit auch noch diese Ungründlichkeit.

Seit Jahren anher hat mein Nachdenken die

Frage beschäftiget, ob und auf welche Weise diesen Mängeln abgeholfen werden und die Sätze in ihrer natürlichen Ordnung mit Euklidischer Strenge, wie man sie nennt, direkt bewiesen werden können. Frei von unwürdigen Fesseln des Auctoritätsglaubens unternahm ich auch die Umarbeitung der Geometrie zu diesem Zwecke, welche als zweiter Theil meines Lehrbuchs bereits vollendet ist; und ich glaube jenem Zwecke nach Kräften Genüge geleistet zu haben. Den Lehrsätzen ist überdieß die Geschichte derselben, soviel als möglich, aus den Quellen selbst geschöpft, und unter dem Texte philosophisch-kritische Notizen beigefügt, wie in dem ersten. Auch geht wieder eine, wiewohl kürzere, Abhandlung voraus, welche 1) eine kritische Untersuchung über die Verfasser der sogenannten Euklidischen Elemente; 2) eine gründliche Beleuchtung der bisherigen Unordnung in der Geometrie nebst der Rechtfertigung meiner Anordnung der Sachen enthält. — Hätte ich nichts anders gethan, als die Verfasser unserer gewöhnlichen Lehrbücher, welche von Jahr zu Jahr sich häufen, und fast nichts weiter, als Abschriften von einander sind, so würde ich sehr weit entfernt seyn, die Menge derselben unnöthigerweise zu vermehren. Allein da meine Arbeit eine ganz andere Gestalt hat, wofür schon der erste Theil zum Beweise dienen könnte, so glaube ich durch die Herausgabe des zweiten nichts unnützes zu thun, zumal da mehrere Besitzer des ersten schon auf den zweiten

Digitized by Google

subscribirt haben. Um jedoch die Urtheile sachkundiger Männer vor der Herausgabe zu hören und benutzen zu können, schien es mir zweckmäßig, gegenwärtigen Auszug vorausgehen zu lassen, und zugleich zu eröffnen, daß Herr Buchhändler Hoffmann hier und alle solide Buchhandlungen durch ihn Subscriptionen auf den zweiten Theil, welcher ungefähr 24 Bogen gr. 8 enthält und 1½ Rthlr. kosten wird, gefälligst übernehmen will.

Wie ich aber einen Auszug aus dem wesentlichen Theile meines Buchs der Prüfung vorlege, so glaube ich hier auch noch etwas aus der vorgesetzten Abhandlung beifügen zu müssen. Meine Umarbeitung der Geometrie verstößt nämlich gegen die fast allgemeine Meinung, daß Euklid die Sätze so vollkommen zusammengestellt und bewiesen habe, daß die Ordnung derselben nicht ohne Nachtheil für die Strenge der Beweise anders gemacht werden könne. Allein daß die berühmten Elemente nicht vollkommen genannt werden können, liegt schon darin, daß die ersten Lehrsätze, worauf so viele andere gegründet sind, nur apagogisch, also unvollkommen bewiesen werden, — der von Petr. Ramus, von Robert Simson und vielen andern gerügten Mängel gar nicht zu gedenken. Und wenn man glaubt, Euklid habe die ganze Masse der Lehrsätze vor sich gehabt und sie in die 15 Bücher so gestellt, wie wir sie haben, so wird meine vorgesetzte Abhandlung hinlänglich beweisen, daß diese Meinung höchst un-

Digitized by Google

wahrscheinlich) um nicht zu sagen historisch ganz falsch sey, und daß Euklid, wenn er jenes gethan, mit unter sehr ungeschickt gehandelt hätte. Wie hätte der Verfasser der Data die Sachen so untereinander werfen können? wie z. B. Sätze ins 6te und 12te Buch verweisen können, welche im 1sten und 3ten stehen sollten? und dergl. — Dieses Urtheil widerspricht freilich dem Lobe des Proklus D., welches eine große Menge neuerer Schriftsteller nachgebetet und eine noch größere Menge Leser, welche die Quelle nicht prüften, geglaubt haben. Allein das Lob des Proklus kann uns hier nicht viel gelten; denn er sagt z. B. auch von den optischen Schriften des Euklid b), sie wären „voll bewundernswürdiger Genauigkeit und wissenschaftlicher Behandlung", da doch die Fehlerhaftigkeit derselben bekannt genug ist. — Eine auf äußere und innere Gründe gestützte Untersuchung hat mich dagegen überzeugt, daß jenes Musterwerk von mehrern Verfassern herrühre, und theils vor, theils zu, theils nach Euklid's Zeit (300 v. Ch.) abgefaßt sey.

Proklus zählt uns S. 19. die Erfinder und Vermehrer der Lehrsätze der Geometrie auf, und nennt den Hippokrates aus Chios (vielleicht

b) Die Stelle des Proklus (Basel. Ausg. S. 20.) heißt so: πολλα μεν και αλλα του ανδρος τουτου μαθηματικα ευγγραμματα θαυμαστης ακριβειας και επιστημονικης θεωριας μεστα. τοι αυτα γαρ και τα οπτικα και κατοπτρικα.

mit Oenopides eine Person c) als den ersten, welcher Elemente (στοιχεια) abfaßte; den Leon, Schüler des Neoklides, als den zweiten, welcher sie mit mehr Fleiße (επιμελεστερον) bearbeitete. Als dritten Verfasser von Elementen rühmt er den Theudios a. Magnesia und sagt dabei, er habe die Elemente schön (καλως) zusammen gestellt. Dem Euklid endlich schreibt er das Verdienst zu, daß er den nicht streng genug (μαλακωτερον) bewiesenen Sätzen unwidersprechliche Beweise (ανελεγκτους αποδειξεις) beigefügt habe. Bei der Sammlung der Elemente (συναγαγων τα στοιχεια) habe er vieles von Eudoxos zusammengestellt (συνταξας), vieles aber von Theätet vollendet (τελεωσαμενος); und weiter unten, „er habe nur um der Zusammenstellung willen (ταξεως ενεκα) ausgewählt und nicht alles aufgenommen, sondern nur so viel er für die Elemente habe brauchen können" (ὁσα στοιχειουν ηδυνατο.) (?)

Welche Bücher der Elemente von Eudoxos herrühren, läßt sich nicht so schwer entscheiden, als welche den Theätet zum Verfasser haben. Der

---

c) Die Meinung von Heinsius (Mem. de l'Acad. de Berlin 1748), daß Hippokrates und Oenopides eine Person seyen, hat viel für sich, was auch Castillon (Mem. de l'Acad. de Berlin 1749) dagegen einwenden mag. Nach Jousii. Scriptt. hist. philos. I. 2. hat es im Alterthume 20 Hippokrates gegeben, die man wohl durch Beinamen unterscheiden mußte.

Digitized by Google

Meinung des R. Simson d), daß das 5te B. dem Eudoxos zugehöre, kann man aus geschichtlichen Gründen und nach Stellen des Proklus, verglichen mit dem Inhalte, gern beitreten, wenn es ihm die Ueberschrift in dem Codex des Cardinal Mazarini auch nicht zuschriebe. Daß ferner das 12te B. den Eudoxos zum Verfasser habe, ist aus einem von Moor aus alten Handschriften wiederhergestellten Briefe des Archimedes an den Dositheus vor seinen Büchern über die Kugel und den Cylinder klar; das 11te und 13te B. aber müssen wir aus innern Gründen ebendemselben Verfasser beilegen. Endlich kann auch nach Andeutungen des Proklus das 2te B. von Eudoxos seyn.

Die Sätze, welche das 1ste und 3te B. enthalten, wo nicht die Bücher selbst, wie wir sie haben, sind aus geschichtlichen Gründen unstreitig die ältesten. Daß sie die Arbeiten des Leon oder Theudios seyen, welche Proklus erwähnt, ist zwar nicht beweisbar, aber auch nicht unmöglich. Sie enthalten hauptsächlich die Sätze, deren Erfindung andere Schriftsteller dem Thales, Pythagoras, Oenopides, Theätet und andern zuschreiben, welche sämmtlich vor jenen lebten. Der Verf. des 1sten B., welcher den Beweis des pythagorischen Lehrsatzes zum Zwecke und Ziele hatte, hat die von seinen Vorgängern erfundenen Sätze so scharfsinnig zusammengestellt, als man es in jenem Zeitalter

d) Uebersetz. der Elemente des Euklid a. d. Engl. von Reder. Anmerkk.

kaum erwarten sollte; und die 3 ersten Aufgaben sind wahrscheinlich spätere Zusätze e). — Daß er auch Verf. des 3ten B. seyn könne, muß man zugeben, wenn man annimmt, daß der spätere Herausgeber der Elemente manches geändert und besonders S. 16 untergeschoben, oder wie Vieta f) meint, verfälscht habe. — Von dem 4ten B., welches blos Aufgaben nebst ihren Auflösungen 3- und regulaire 4-, 5-, 6- und 15-ecke in und um den Kreis zu beschreiben (mit hin und wieder verfälschten Beweisen) enthält, nennt sich Pappus selbst als Verfasser g). — Das 6te B., gewiß jünger als die 3 ersten und das 5te, können wir wegen vieler, schon von Simson hinlänglich nachgewiesener Mängel, dem Verf. der Data nicht beilegen. Jedoch ist es möglich, daß die ersten 30 Sätze von Euklid herrühren, wozu Theon erst die mangelhaften Beweise lieferte; denn daß Euklid auch zu den Datis die Beweise nicht gemacht habe, sagt ja Pappus ausdrücklich. — Die 3 letzten Sätze sind aber Zugaben von Theon, welcher sich selbst als Verf. derselben und zugleich als der Herausgeber der Elemente nennt h).

e) Durch diese Annahme läßt sich der Verf. des 1sten B. leicht auch gegen den Vorwurf der Hysterologie, welchen ihm P. Ramus (Schol. math. L. VIII.) macht, entschuldigen.

f) Exercitt. Math. p. 386.

g) Collectt. Math. L. VII., wo er S. 4. u. 5. citirt und sagt: τουτων δυο μεν τα πρωτα δεδειχται εν τη τεταρτη βιβλιω των πρωτων στοιχειων, οπερ ημεν γεγραφωμεν.

h) Comment in Cl. Ptolem. Almag. Basil. 1538. p. 50. Δεδειχται ημιν εν τη εκδοσει των στοιχειων προς τω τελει του εκτου βιβλιου.

Digitized by Google

Zu Theons und Pappus Zeit bestanden die Elemente aus 2 Sammlungen: die ältere, welche Pappus a. a. O. πρωτα στοιχεια nennt, und die neuere. Jene enthielt die ersten 6 Bücher, diese begann mit dem 7ten, welches daher auch mit den ersten Sätzen einer neuern Materie anhebt. Eine gleiche Art des Vortrags im 7ten, 8ten und 9ten Buche und gemeinschaftliche Definitionen sprechen dafür, daß diese 3 Bücher das Werk eines Verf. seyen, welches jedoch aus geschichtlichen Gründen viel älter, als Theon und von diesem erst unter die Elemente gesetzt zu seyn scheint. Dagegen besteht das 10te Buch aus mehreren Abhandlungen verschiedener Verf. Die erste von S. 1. bis 27. ist nach Stellen des Proklus zu schließen sehr alt und nicht unwahrscheinlich von Theätet; die zweite von S. 49. — 73. ist aus geschichtlichen Gründen jünger und die dritte von S. 86. bis 117. scheint aus innern Gründen von dem Verf. der zweiten herzurühren. Daß die 2 letztern von Euklid und eben die von Proklus erwähnte weitere Ausführung der Arbeit des Theätet seyen, (wenn anders dieser der Verf. der ersten ist), hat nichts erhebliches gegen sich. Die dazwischen stehenden Stücke sind spätere Zugaben, wahrscheinlich von Theon eingeschoben. — Daß endlich B. 14. und 15. von Hypsikles herrühre, zieht in unsern Zeiten wohl Niemand mehr in Zweifel.

Auf diese Hauptergebnisse meiner Untersuchung muß ich mich hier beschränken, bedauernd, daß

Digitized by Google

der Platz nicht gestattet, meine Gründe ausführlich zu entwickeln. — Wenn aber jene Elemente eine Sammlung von Arbeiten verschiedener Verf. aus verschiedenen Zeiten sind, so kann es den Kenner der Geschichte der Mathematik nicht wundern, wenn sie nicht in der Ordnung stehen, in welche sie ein Verf. hätte stellen können. — Gesetzt aber auch, sie wären das Werk eines Verf. (Zusammensetzers), so können wir an seine Aneinanderreihung der Sachen nicht gebunden seyn, wenn sie der Natur der Wissenschaft nicht gemäß ist, und die Sätze der gehörigen Begründung ermangeln.

Wie ich nun die Materien und Sätze mit Vermeidung der berührten Mängel zu ordnen versucht habe, ist aus diesem Entwurfe und der vorgesetzten Inhaltsanzeige klar. Die ausführliche Rechtfertigung dieser Einrichtung im einzelnen, welche den 2ten Abschnitt meiner Abhandlung ausmacht, würde hier nicht Raum genug finden, und eine oberflächliche könnte leicht zu Mißverständnissen führen. Dem gründlichen Prüfer würden überdieß viele meiner Bemerkungen auch überflüßig seyn; daher nur noch einige wenige.

Da die Geometrie gleichsam mit ihren Wurzeln in dem Boden der Metaphysik hängt, so habe ich die der Geometrie bedürftigen metaphysischen Sätze, deren Vorhandenseyn in der menschlichen Erkenntniß die Mathematik weder beweisen kann, noch zu beweisen hat, in einer Einleitung vorausgestellt. Dazu gehört auch die Vorstellung des

Digitized by Google

Parallelismus als einer ursprünglich in unserm Erkenntnißvermögen vorhandenen, wofür sie auch Kant genommen hat; und es liegt das Mißlingen der vielen Versuche, die Parallellinien zu demonstriren, womit man immer noch nicht aufhört, eben darin, daß man einen metaphysischen Gegenstand geometrisch darthun will. Die sogenannten Euklidischen Axiome kommen in meinem Buche als solche nicht vor, weil sie keine sind. Dieses habe ich von den der allgemeinen Größenlehre betreffenden, und daß sie von Euklid nicht herrühren können, in der Vorrede zu meinem Lehrbuche S. 121. ꝛc. gezeigt; daher über die die Geometrie besonders angehenden, nämlich 8, 10, 11, 12 nur noch zu reden ist. N. 8. sagt, genau überlegt, gar nichts; und die Uebersetzung des Wortes ἁρμοζειν durch „decken" ist der Geometrie ganz unwürdig. N. 10. ist ein Lehrsatz und von mehrern Mathematikern auch als solcher aufgestellt. Ihn, nebst den 6ten und 7ten, hat schon Heron als Grundsatz verworfen, Proklus aber nebst den 11ten unter die Postulate gesetzt. Ramus meint, Theon habe ihn zuerst unter die Axiome eingeschoben i). Ueber das 11te Axiom ist nichts weiter zu sagen, als daß es untergeschoben ist (wie wahrscheinlich alle). Der Verf. der Definitionen pflegt εν τῳ αυτῳ επιπεδῳ nicht auszulassen. Ueberdieß ist das Zusammentreffen ins unendliche (επ' απειρον) verlängerter Linien „Unsinn". N. 12. muß anders

i) Schol. Math. L. VII. p. 158.

Digitized by Google

ausgesprochen werden; s. §. 10. b. — Dagegen habe ich einen andern logischen Grundsatz §. 14. nicht weglassen können, welcher in allen bisherigen Lehrbüchern zwar angewendet, aber gewöhnlich nicht aufgestellt wird. Größtentheils habe ich die gewöhnlichen Beweise beibehalten, bei mehreren aber die kürzesten gewählt, z. B. §. 97. Bisweilen sind sie aber auch ganz weggelassen, und nur die §§. citirt, aus welchen sie entnommen werden können, weil sie, wo das Buch zum Unterrichte gebraucht wird, die Schüler selbst finden sollen. — Wie die apagogischen Beweise vermieden sind, ersieht man am besten aus dem Buche selbst. Die Bezeichnung der Linien, Bogen, Winkel ꝛc. ist die von Carnot in s. géométrie de position gebrauchte, welche mir die bequemste scheint.

Es würde mir angenehm seyn, wenn es mir nach den Urtheilen unbefangener Kenner der Sache einigermaßen gelungen wäre, die Geometrie in logisch-systematischer Ordnung aufzustellen, womit schon P. Ramus umging. Indem ich aber wohl fühle, daß sich manche Mängel in meinem Versuche werden auffinden lassen, so habe ich meine Herren Recensenten zu bitten, mich auf solche mit derjenigen Gerechtigkeit und Humanität aufmerksam zu machen, deren ich mich bei den gründlichen Beurtheilungen meiner früheren Schriften mit schuldigem Danke erfreue.

Frankfurth a. d. O., im Juli 1822.

Der Verfasser.

Digitized by Google

Inhalt.

Einleitung. Begriffe und Sätze, welche die Geometrie voraussetzt. §. 1. — 14.

Vom Raume überhaupt. §. 1. Ureigenschaften desselben. §. 2. Grenzen. §. 3. Dimensionen. §. 4. Gestalt und Inhalt. §. 5. Eintheilung der Geometrie. §. 6. Gerade und krumme. §. 7. — 8. Metaphysische Sätze. §. 9. — 10. Lehrsatz. §. 11. Grundsatz der Vergleichung. §. 12. auf die Raumvorstellungen angewendet. §. 13. Grundsatz der Uebereinstimmung §. 14.

Erster Abschnitt. Von den geraden Linien nach Lage und Größe (Longimetrie.) §. 15. — 45.

A. Von den Linien in Hinsicht ihrer Lagen. §. 16. — 40.

1) Von den Lagen der Linien überhaupt. §. 17. — 25.

a) zweier Linien §. 17. — 20.
b) dreier " §. 21. — 22.
c) vier " §. 23. — 24.
d) mehrerer " §. 25.

2) Von den Lagen der Linien in der Kreisbegrenzung. §. 26. — 40.

Grundeigenschaften des Kr. §. 26. — 27. Linien im Kr. §. 28. — 30. Winkel im Kr. §. 31.

a) Centriwinkel §. 32. — 33. b) Peripheriewinkel §. 34. — 36. c. Tangent. W. §. 37. — 39. Parallellinien im Kr. §. 40.

B. Von den Linien und Winkeln in Hinsicht ihrer Größe. §. 41. — 45.

1) Längenmaaß §. 42. Maaßstäbe §. 43.
2) Winkelmaaß §. 44. Instrumente dazu §. 45.

Zweiter Abschnitt. Von den Flächenräumen (Planimetrie) §. 46. — 144.

Digitized by Google

A. Von den Ebenen in Hinsicht ihrer Gestalten. §. 47. — 111.
1) Betrachtung einzelner Ebenen überhaupt §. 48. — 92.
a) dreiseitiger. §. 48. — 65.
b) vierseitiger §. 66. — 76.
c) fünfseitiger §. 77. — 82.
d) vielseitiger §. 83. — 89.
e) Kreis §. 90. — 92.
2) Betrachtung gleichgestalteter (ähnlicher) Ebb. in gegenseitiger Beziehung §. 93. — 111.
a) dreiseitiger §. 93. — 106.
b) vierseitiger §. 107.
c) vielseitiger §. 108. — 109.
d) Kreise §. 110. — 111.
B. Von den Ebenen in Hinsicht ihres Inhalts oder Größe §. 112. — 144.
1) Vom Inhalte einzelner Ebenen §. 112. — 128. Parallelogramme und Dreiecke §. 112. — 118. Irregulaire. §. 119. — 122. Regulaire. §. 123 Kreis. §. 124. ꝛc.
2) Vergleichung der Ebenen in Hinsicht ihres Inhalts. §. 129. — 144.
a) gleicher. §. 130. — 134.
b) ungleicher und ähnlicher. §. 135. — 144.
Dritter Abschnitt. Von den Körperräumen (Stereometrie.) §. 145. — 210.
A Von den Körperräumen in Hinsicht ihrer Gestalten. §. 146. — 180.
1) Betrachtung einzelner Körperräume. §. 150. — 171.
a) Prismatischer. §. 150. — 152.
b) Pirampden. §. 153. — 156.
c) regulairer Krpr. §. 157. — 171.
2) Betrachtung der Flächen der Körper in gegenseitiger Beziehung. §. 172. — 180.
B. Von den Körperräumen in Hinsicht des Inhalts oder Größe. §. 181. — 210.
1) Von dem Inhalte einzelner Körperräume. §. 181. — 197.
a) Prismatischer. §. 181. — 185.
b) Pirampden. §. 186. — 189.
c) Regulairer Krpr. §. 190. — 197.
2) Vergleichung der Körperräume. §. 198. — 210.
a) gleicher. §. 199. — 203.
b) ungleicher. §. 204. — 210.

Digitized by Google

Die Geometrie.

Von dem Denken der Größen des Raums nach ihren Gestalten, Gehalten und Verhältnissen.

Einleitung.

Begriffe und Sätze, welche die Geometrie voraussetzt.

1. Das Denken der Körper der Natur, ihrem Dasein nach, ist unserm Verstande mittelst einer freien und reinen Grundvorstellung möglich, welche wir den Raum nennen. Der Inbegriff der Erkenntnisse, welche wir von dem Raume erlangen können, im Zusammenhange macht eine Wissenschaft aus, welche die Geometrie genannt wird. In sofern daher der Raum der Gegenstand derselben ist, so haben wir vor allen theils die Ureigenschaften des Raums, theils auf welche Weise wir zu den Erkenntnissen davon gelangen in Betrachtung zu ziehen.

2. Diejenigen Eigenschaften, welche unser

Digitized by Google

Denkvermögen am Raume allgemein wahrnimmt, sind

a. Ausdehnung, welche die Bedingung des Denkens des Raums ist, nach allen Richtungen; denn er ist eine freie Vorstellung. (§. 1.);

b. Unendliche Begrenzbarkeit, aus demselben Grunde;

c. Gleichartigkeit, weil der Raum eine reine Vorstellung ist. (§. 1.);

d. Stetigkeit, weil er als ein ununterbrochenes gleichartiges Ganze gedacht werden muß.

3. Alles nun, was der menschliche Verstand zur bestimmten Erkenntniß bringen will, muß innerhalb bestimmter Grenzen denken, mithin auch die Raumvorstellungen. Daher denken wir den Körperraum von Flächen, die Flächen von Linien, die Linien von Punkten begrenzt; der Punkt aber ist selbst die Grenze aller Ausdehnung. Er ist daher keine Vorstellung des Raums, sondern blos im Raume.

4. Unter den drei Arten von Raumvorstellungen: Linie, Fläche und Körperraum ist daher die Linie die einfachste, und hat nur eine Richtung oder Dimension, welche die Länge heißt. Auf sie muß unser Erkenntnißvermögen, nach einem ihm eigenthümlichen Gesetze, die übrigen zurückführen. Denn obgleich der Flächen- und Körperraum innerhalb seiner Grenzen nach unendlich vielen Richtungen ausgedehnt gedacht werden kann, so kann doch unser Erkenntnißvermögen den Flächen-

Digitized by Google

raum nur noch 2 Richtungen, Länge und Breite, den Körperraum aber noch 3 Dimensionen, Länge, Breite und Höhe in seine Gewalt bekommen.

5. Alle drei Arten von Raumvorstellungen aber können in zweierlei Hinsicht in Betrachtung gezogen werden:

a. Es können nemlich Linien, Flächen und Körperräume unendlich vielerlei Lagen gegen einander haben (§. 2., a. b). Die mannigfaltigen Lagen der Linien können den Flächen, in sofern sie von jenen begrenzt werden, desgleichen die Lagen der Grenzflächen den Körperräumen unendlich vielerlei Gestalten geben.

b. Jeder begrenzte Raum muß eine gewisse Menge seiner Art enthalten, d. h. einen gewissen Inhalt oder Größe haben. Diese aber hängt von den Grenzen ab, welche ebenfalls Lage oder Gestalt und Größe haben. Daraus erkennen wir, daß man die Lage oder Gestalt der Räume zu betrachten hat, bevor man den Inhalt derselben untersuchen kann.

6. Nach den drei Arten von Raumvorstellungen (§. 3.) zerfällt nun die Geometrie in 3 Hauptabschnitte, und hat daher

I. von den Längenräumen oder Linien (Longimetrie)
II. von den Flächenräumen (Planimetrie)
III. von den Körperräumen (Stereometrie)

zu handeln. Jeder derselben aber hat seine Ge-

Digitized by Google

genſtände nach §. 5. wieder in zweierlei Hinſicht zu betrachten:

A. in Hinſicht der Lage oder Geſtalt;

B. in Hinſicht des Gehalts oder Größe.

7. Es findet aber bei den Raumvorſtellungen der Unterſchied ſtatt, daß ſie entweder gerade, oder krumm ſind. Es werden nämlich die Flächen entweder von geraden, oder von krummen Linien, die Körper entweder von ebenen oder krummen Flächen begrenzt, und die Körper ſelbſt ſind entweder gerade oder krumm. Die Vorſtellungen des Gerade- oder Krummſeins ſind in unſerm Erkenntnißvermögen urſprünglich vorhanden und keiner weitern Erklärung fähig. Nach ihnen laſſen ſich die Raumarten (§. 3.) in 2 Hauptklaſſen theilen und es iſt deshalb die wiſſenſchaftliche Betrachtung derſelben von zweierlei Art. Die Unterſuchung der krummen aber bedarf der Geſetze der geraden; daher die letztere vorausgehen muß, worauf ſich dieſes Buch beſchränkt.

Anm. 1. Die gewöhnlichen Erklärungen der geraden Linien als: ſie ſey diejenige, welche in allen Theilen ebendieſelbe Richtung (?) behält; oder der kürzeſte Weg (?) zwiſchen 2 Punkten ꝛc. ſetzen die gerade Linien ſchon voraus. Von der krummen läßt ſich blos ſagen, daß ſie in keinem Theile gerade ſey.

2. Die Lehre von den geraden Räumen nennt man gewöhnlich Elementargeometrie, die von den krummen aber höhere Geometrie.

Digitized by Google

8. Durch das Gerade- oder Krummsein der Raumvorstellungen aber wird das Denken der Räume bedingt. Die Bedingungen desselben geben Sätze, deren Erkenntnißgrund die Geometrie eben so wenig nachweisen kann, als das Vorhandensein jener in der menschlichen Erkenntniß selbst; welches daher der Metaphysik zukommt. Diese Sätze beziehen sich theils auf die einfachen Raumvorstellungen an sich; theils in sofern sie andere begrenzen. (§. 3.)

9. In dem ersten Falle gelten folgende 3 Sätze:

a. zwischen 2 Punkten kann nur eine gerade Linie, aber unendlich viele krumme statt finden;

b. durch 2 Punkte ist eine gerade Linie bestimmt, zur Bestimmung einer krummen aber gehören mehrere;

c. eine gerade L. kann nicht, wohl aber eine krumme, in sich selbst zurücklaufen.

10. In Hinsicht der Begrenzung aber finden diese 3 Sätze statt: Die Begrenzung

a. einer Linie fordert wenigstens 2 Punkte;

b. die einer Ebene wenigstens 3 gerade Linien, aber nur eine krumme, wenn sie in sich selbst zurück läuft (§. 9. c.);

c. die eines Körpers wenigstens 4 Ebenen, aber nur eine krumme Fläche, welche sich zusammenschließt.

Anm. Diese Sätze machen gleichsam die Grenze zwischen der Metaphysik und der Geome-

Digitized by Google

trie, und werden, in sofern sich Sätze der Geometrie auf sie gründen, auch Grundsätze genannt.

11. Alles nun was wir von den Raumvorstellungen zur bestimmten Erkenntniß bringen, betrifft die Eigenschaften derselben entweder in Hinsicht der Lage und Gestalt, oder in Hinsicht der Größe. (§. 5). Sie sind entweder die nothwendigen Merkmahle der Raumvorstellungen selbst (Grundeigenschaften) und unmittelbar klar (z. B. daß ein Dreieck 3 Seiten hat ꝛc.), oder ihre Wahrheit läßt sich aus schon als wahr erkannten beweisen. Die Urtheile über letztere werden Lehrsätze genannt. — Es besteht daher die Geometrie aus einer Reihe von Sätzen, wo der Erkenntnißgrund eines jeden in einem vorhergehenden liegt.

12. Um aber über einen Gegenstand ein Urtheil fällen zu können, erfordert die Natur unsers Erkenntnißvermögens, daß wir ihn mit einem andern gleichartigen vergleichen. Wollen wir daher über die Lage oder Gestalt einer Raumvorstellung urtheilen, so müssen wir sie mit der Lage oder Gestalt einer andern gleichartigen vergleichen und ebenso ist ein Urtheil über die Größe derselben nur durch Vergleichung mit der Größe einer andern gleichartigen möglich. Darum stützt sich unser Urtheil auf den allgemeinen Grundsatz der Vergleichung: einem Gegenstande A. kommt die Eigenschaft eines andern B.

Digitized by Google

entweder zu oder nicht; ein drittes ist unmöglich.

13. Dieser Satz auf die Eigenschaften der Raumvorstellungen, in sofern sie Gegenstände unserer Erkenntniß sind, (§. 11.) angewendet, heißt nun so:

1) in Hinsicht der Lage und Gestalt (§. 5. a.)
   a. Linien, Flächen oder Körperräume haben entweder gleiche Lage, wo sie einander parallel genannt werden, oder nicht;
   b. Flächen oder Körperräume haben entweder gleiche Gestalt, wo sie einander ähnlich heißen, oder nicht;
2) in Hinsicht der Größe (§. 5. b.),
   a. gleichartige Räume haben entweder gleiche Größe (sind einander gleich), oder nicht (I. §. 22.*);
   b. gleichartige Räume haben entweder gleiches Verhältniß zu einander, wo sie einander proportionel sind (I. §. 40.), oder nicht.

14. Zur Erkenntniß der reinen Uebereinstimmung gedachter Gegenstände, oder dessen Gegentheil, aber bedarf unser Verstand eines allgemeinen Unterscheidungsgrundes oder Kriteriums. Dieses ist der allgemein gültige Satz: Allem, was unter gleichen Bedingungen gedacht wird, muß gleiches zukommen, welcher Satz auf

*) I. bedeutet mein Lehrbuch der reinen Mathesis ꝛc. Th. I. Berlin 1817. Realschulbuchhandlung.

Digitized by Google

unsern Gegenstand angewendet so heißt: Alle Raumvorstellungen, welche unter gleichen Bedingungen gedacht werden, müssen gleiche Eigenschaften haben. Darauf gründen sich alle Sätze der Gleichheit. Und weil, wenn eine gewisse Raumvorstellung A. einer andern gleichartigen B. in gewisser Hinsicht gleich ist, auch B. in ebenderselben Hinsicht gleich A., so lassen sich auch alle Sätze der Gleichheit rein umkehren.

Anm. Man pflegt sonst die Lehren der Geometrie in zweierlei Form abzuhandeln, nämlich als Lehrsätze und Aufgaben. Jene stellt man als gefunden auf, und beweißt sie, bei diesen zeigt man die Art der Auflösung und thut ihre Richtigkeit dar. Aber als reine Wissenschaft enthält die Geometrie blos Lehrsätze; die Aufgaben darüber sind Sache der Anwendung derselben. — Aus vielen Lehrsätzen lassen sich weitere Folgerungen machen, welche zwar auch Lehrsätze sind, aber gewöhnlich Zusätze genannt werden.

Digitized by Google

Erster Abschnitt.
Von den geraden Linien nach Lage und Größe. (Longimetrie.)

Einleitung.

15. Die Vorstellung einer geraden Linie ist unserm Verstande nur dadurch möglich, daß wir von einem angenommenen Punkte a. (Fig. 1.) mit der Vorstellung desselben nach einer angenommenen geraden Richtung fortgehen (§. 7.) Denken wir sie auch in b. begrenzt, so können wir von ihr behaupten:

a. daß zwischen a. und b. nur diese einzige gerade L. gedacht werden kann (§. 9, a.);

b. daß so wohl in ihr unendlich viele andere Grenzpunkte angenommen werden können, als auch, daß sie ins unendliche verlängert werden kann (§. 2, b.);

c. daß durch ihre 2 Grenzpunkte ihre Länge bestimmt ist (§. 5, b.)

Von ihrer Lage und Größe können wir aber nur dann urtheilen, wenn wir sie in beiderlei Hinsicht in Beziehung auf andere denken (§. 12.)

A. Von den Linien in Hinsicht ihrer Lagen.

16. Um die Lage zweier Linien zu erkennen,

Digitized by Google

müssen wir beide in *ebenderselben Ebene* denken (§. 12.) Diese Ebene können wir aber entweder *unbegrenzt* oder *begrenzt* annehmen. Daher können wir die Lagen der Linien nicht nur überhaupt, d. h. *ohne* Rücksicht auf ihre Begrenzung, sondern auch innerhalb *bestimmter Begrenzung* betrachten.

1) *Von den Lagen der Linien überhaupt.*

17. Zwei Linien haben entweder *gleiche* Lage oder *nicht* (§. 13, 1). Haben sie *gleiche* Lage, so treffen sie verlängert entweder so zusammen, daß sie *eine* Linie ausmachen (§. 15.) oder sie sind *parallel*, als $\overline{ab} \parallel \overline{cd}$ (Fig. 1.) (§. 13. 1.)

18. Haben sie *nicht gleiche* Lage, so treffen sie entweder zusammen oder nicht. Im erstern Falle können sie

a. entweder einen gemeinschaftlichen Grenzpunkt haben als Fig. 2. $\overline{ab}$ und $\overline{ac}$. Ihre Neigung heißt ein *Winkel*, die Linien selbst die *Schenkel* und der gemeinschaftliche Grenzpunkt a. die *Spitze* desselben;

b. oder der Grenzpunkt der einen, Fig. 3. $\overline{cd}$ liegt in der andern $\overline{ab}$ (§. 15, b.) dann entstehen 2 Winkel $\widehat{acd}$ und $\widehat{dcb}$, welche in sofern *Nebenwinkel* heißen;

c. oder sie durchschneiden einander in einem Punkte, als Fig. 4. $\overline{ab}$ und $\overline{cd}$, wodurch 4 Winkel entstehen. Die einander entgegenliegenden als

Digitized by Google

$\hat{m}$ und $\hat{u}$, $\hat{n}$ und $\hat{o}$ werden **Scheitelwinkel** genannt.

Treffen sie aber nicht zusammen, Fig. 5., so nähern sie sich auf der einen Seite, wo sie **convergent**, und **entfernen** sich auf der andern, wo sie **divergent** genannt werden.

Anm. Aus diesen möglichen Verbindungsarten zweier Linien erkennen wir, daß sie dadurch **keinen Flächenraum völlig einschließen.** Vergl. §. 10, b.

19. Nun ist an sich klar, daß von der Lage 2 zusammentreffender Linien ihre größere oder geringere Neigung (Winkel) abhängt, und daß durch die **Größe des Winkels die Lage der Linie erkannt wird.** Denken wir nun Fig. 3. von c. aus $\overline{cd}$ in allen möglichen Lagen, so muß es unter allen **eine** geben, wo die **Nebenwinkel** (§. 18, b) **einander gleich** sind, als ce, wo $\hat{ace} = \hat{bce}$; in allen andern aber dieselben **ungleich**. (§. 13.) Sind nun

a. die **Nebenwinkel** einander gleich, so heißt ein jeder ein **rechter** Winkel als $\hat{ace} = \hat{bce} = \hat{R}$, die Lage der Schenkel heißt **lothrecht, senkrecht,** und sie selbst in sofern **Katheten;**

b. sind sie **ungleich**, so muß der eine, als $\hat{acd} > \hat{R}$ seyn und heißt **stumpf**, der andere $\hat{bcd} < \hat{R}$, und heißt **spitz**. Beide nennt man **schiefe** Winkel.

Digitized by Google

20. Daraus ergiebt sich,

a. daß die Nebenwinkel zusammen 2 rechte betragen, als Fig. 4. $\hat{m} + \hat{n} = 2\,R = \hat{n} + \hat{u} = \hat{o} + \hat{u}$ ꝛc. daher der eine $\hat{m}$ das Complement des andern $\hat{n}$ zu $2\,\hat{R}$ ist;

b. daß die Scheitelwinkel (§. 18, c.) einander gleich sind: als $\hat{m} = \hat{u}$, $\hat{n} = \hat{o}$, und zusammen $= 4\,\hat{R}$.

21. Die mannigfaltigen Fälle, welche bei den Lagen dreier Linien statt finden können, sind

a. entweder §. 17. bis 20. unterworfen;

b. oder es sind 2 parallel, Fig. 6. ab || cd, und werden von der dritten ef durchschnitten. Dadurch entstehen 8 Winkel, von welchen $\hat{o}$, $\hat{x}$; $\hat{u}$, $\hat{y}$ innere, die übrigen als $\hat{m}$, $\hat{n}$, äußere heißen. Die einander entsprechenden äußern und innern, als $\hat{n}$, $\hat{y}$, oder $\hat{m}$, $\hat{x}$ werden Gegenwinkel, die innern aber $\hat{o}$, $\hat{y}$, oder $\hat{u}$, $\hat{x}$, Wechselswinkel genannt;

c. endlich können sie auch eine 3seitige Fläche einschließen, deren Betrachtung in den 2ten Abschnitt gehört. (§. 47. ꝛc.)

22. Sind nun 2 Linien parallel, Fig. 6. $\overline{ab} \parallel \overline{cd}$, und werden von $\overline{ef}$ durchschnitten, so müssen auch die Abschnitte dn und by gegen $\overline{ef}$, so gewiß

als $\overline{ef}$, als eine gerade Linie in allen Theilen dieselbe Richtung hat (§. 15.), einerlei Lage haben. Daher muß

a. $\hat{n} = \hat{y}$, d. h. der äußere Winkel dem innern Gegenwinkel (§. 21, b.) gleich seyn. Daraus folgt

b. daß die Wechselswinkel einander gleich, $\hat{o} = \hat{y}$, und $\hat{u} = \hat{x}$ (§. 20, b.), und

c. daß die innern Winkel $\hat{u} + \hat{y} = 2\,\hat{R} = \hat{x} + \hat{o}$ (§. 20, a.)

23. Von den mancherlei Lagen, welche 4 Linien haben können, gelten

a. entweder die §. 17. bis 22. gefundenen Sätze,

b. oder es bilden 3 derselben eine 3seitige Fläche, indem die 4te mancherlei Lagen haben kann;

c. oder alle 4 begrenzen eine 4seitige Fläche, wovon im 2ten Abschnitte §. 66. ꝛc. die Rede seyn wird.

24. Von den letztern Fällen verdienen 2 Beispiele besondere Aufmerksamkeit.

a. Wenn nämlich 2 Linien parallel liegen, als Fig. 7. ab ‖ cd, und von ef und gm so durchschnitten werden, daß 3 einen gemeinschaftlichen Durchschnittspunkt haben, als cd, ef, gm in m, so sind $\hat{y} + \hat{v} + \hat{u} = \hat{o} + \hat{u} + \hat{x}$ (§. 22, b.) $= 2\,\hat{R}$ (§. 20, a.); und $\hat{n} + \hat{x} = \hat{emb} = \hat{y} + \hat{v}$ (§. 22, a. b.);

Digitized by Google

b. wenn je 2 Linien parallel liegen, als Fig. 8. ab ‖ cd, ef ‖ gk, und sich je 2 durchschneiden, so entstehen Parallellinien zwischen Parallellinien, und es ist $\hat{o} = \hat{n} = y$ (§. 22.); desgl. $\hat{x} = \hat{u}$; daher $\hat{o} + \hat{u} = \hat{x} + \hat{y} = \hat{o} + \hat{x} = \hat{u} + \hat{y} = 2\hat{R}$ (§. 22, c.)

25. Kommen die Lagen von 5, 6, 7 . . . Linien in Betrachtung, so finden entweder die bisher gefundenen Fälle und Sätze statt, oder sie begrenzen 5, 6, 7 . . . — seitige Flächen, deren Untersuchung in den 2ten Abschnitt gehört (§. 77. ꝛc.)

2. Von den Lagen der Linien in der Kreisbegrenzung.

26. Wollen wir die Lagen der Linien auch innerhalb bestimmter Begrenzung betrachten, (§. 16.) so müssen wir diejenige wählen, welche für unsere Erkenntniß die einfachste ist. Diese ist aber die von einem Punkte aus gleichweite. Denken wir daher die Ebene, in welcher die Lage der Linien zu betrachten ist (§. 16.), Fig. 9. von c. aus nach allen möglichen Richtungen gleichweit begrenzt, welches unserm Vorstellungsvermögen nur dadurch möglich wird, daß wir den Grenzpunkt einer bestimmten Linie, als ac in gleicher Entfernung von und um c herumbewegt denken, so entsteht die Vorstellung eines Kreises adbea. In diesem heißt c der Mittelpunkt (centrum), adbea der Umkreis oder Peripherie und ac,

womit er beschrieben wird, Halbmesser oder radius.

27. Aus der Natur des Kr. ist nun an sich klar,

a. daß alle von c. zur Periph. gedachten Linien (Halbmesser) einander gleich seyn müssen, $\overline{ac} = \overline{cd} = \overline{cb}$ ꝛc.;

b. daß die Periph. in allen ihren Theilen eine und eben dieselbe Krümmung behält (§. 14.);

c. daß dieselbe in sich selbst, d. i. in ihren Anfangspunkt zurücklaufen muß, daher adbea (§. 9. c.)

28. In Beziehung auf die Kreisbegrenzung oder Peripherie können nun die Linien von dreierlei Art seyn:

a. entweder sie liegen innerhalb des Kreises so, daß ihre beiden Grenzpunkte (§. 10, a) in der Periph. selbst liegen, wo sie Sehnen (Chorden) heißen, als Fig. 9. $\overline{ad}$, $\overline{db}$ ꝛc.;

b. oder sie liegen außerhalb des Kr. so, daß sie die Periph. nur in einem Punkte berühren, wo sie Tangenten genannt werden, als bf;

c. oder sie liegen theils in, theils außer dem Kr. so, daß sie die Periph. durchschneiden, wo man sie Sekanten nennt, als bg.

29. Denkt man sich nun in dem Kr. Fig. 9. adbea von a durch c nach b eine ger. L., so muß es bei b einen Punkt geben, wo $\overline{ab}$ von der Periph. begrenzt wird. Eine solche durch den

Digitized by Google

Mittelpunkt gehende Sehne nennt man einen Durchmesser des Kreises, welcher 2 Halbmessern gleich ist ab = ac + bc (§. 27, a.) Es müssen daher auch alle Durchmesser einander gleich seyn, ab = dc (I. §. 27.)

30. Aus §. 28, a folgt, daß jede Sehne die Periph. in 2 bestimmte Theile theilt, als Fig. 9. $\overline{ad}$ in $\overset{\frown}{ad}$ und $\overset{\frown}{aebd}$. Ist daher die Sehne bestimmt, so sind auch beide ihr zugehörigen Bogen bestimmt, und umgekehrt. Ist nun die Sehne ein Durchmesser (§. 29.) als ab, so müssen die Bogen desselben, weil er durch c geht, vollkommen übereinstimmen (§. 14.) $\overset{\frown}{adb} \overset{\sim}{=} \overset{\frown}{bea}$, $\overset{\frown}{ead} \overset{\sim}{=} \overset{\frown}{dbe}$; daher theilt jeder Durchmesser die Periph. in 2 gleiche und ähnliche Theile, Halbkreise genannt.

31. Die Winkel können in Beziehung auf die Elemente des Kr. (Mittelp. und Periph.) von dreierlei Art seyn:

a. entweder die Spitze eines Winkels liegt am Mittelpunkt und seine Schenkel sind Halbmesser, als Fig. 9. $\hat{acd}$, $\hat{dcb}$ ꝛc. und der Winkel wird Centriwinkel genannt;

b. oder die Spitze des Winkels liegt in der Periph. so daß seine Schenkel 2 Sehnen, als $\hat{dab}$, $\hat{adb}$ ꝛc., welche Art Winkel Peripheriewinkel heißt;

c. oder ein Winkel, dessen Spitze in der Periph. liegt, wird von 1 Sehne und 1 Tangente ge-

Digitized by Google

gebildet, als $\hat{dbf}$, welcher Tang. Winkel genannt wird.

In allen 3 Fällen sehen wir, daß zwischen den Schenkeln ein von ihnen abgegrenzter Bogen des Kreises liegt, dessen Größe von der Größe des Winkels abhängt.

a. Centriwinkel.

32. Es ist aus dem Denken des Kreises selbst klar (§. 26.), daß der Centriwinkel desto größer wird, je größer der Bogen zwischen seinen Schenkeln z. B. Fig. 9. $\overset{\frown}{ad} > \overset{\frown}{bd}$, daher $\hat{acd} > \hat{bcd}$, und umgekehrt. Es wird daher jeder Centriwinkel von dem Bogen zwischen seinen Schenkeln gemessen, welches man so ausdrückt: $\hat{acd} = \overset{\frown}{ad}$, $\hat{dcb} = \overset{\frown}{db}$ ꝛc. und umgekehrt. Daher auch $\hat{acd} + \hat{dcb} = 2\,\hat{R}$ (§. 20, a) $= \overset{\frown}{adb}$ (Halbkreis §. 30.), folgl. $1\,\hat{R} = \frac{1}{4}$ Periph. (Quadrant), mithin die ganze Peripherie $= 4\,\hat{R}$.

33. Daraus folgt nun, daß sich die Centriwinkel verhalten, wie ihre Bogen, z. B. $\hat{aod} \,..\, \hat{dcb} = \overset{\frown}{ad} \,..\, \overset{\frown}{db}$. Sind daher die Centriwinkel gleich, so sind auch ihre Bogen gleich, und umgekehrt, als $\hat{dcb} = \hat{ace}$ (§. 20, b) folgl. $\overset{\frown}{bd} = \overset{\frown}{ae}$, $\hat{acd} = \hat{ecb}$, folgl. $\overset{\frown}{ad} = \overset{\frown}{eb}$.

Digitized by Google

b. Peripheriewinkel.

34. Die Peripheriewinkel können in Hinsicht der Lage ihrer Schenkel von dreierlei Art seyn:

1) entweder es geht ein Schenkel des Peripheriewinkel durch den Mittelpunkt des Kreises (Durchmesser §. 29.) z. B. Fig. 9. bei $\overset{\frown}{dab}$, $\overset{\frown}{ade}$ ꝛc.;

2) oder der Mittelpunkt des Kreises liegt zwischen beiden Schenkeln, als Fig. 10. $\overset{\frown}{dae}$;

3) oder der Mittelpunkt liegt außerhalb der beiden Schenkel, als $\overset{\frown}{eaf}$.

In allen 3 Fällen aber erkennen wir, daß der Bogen zwischen den Schenkeln desto größer ist, je größer der Peripheriew., und umgekehrt; als Fig. 10. $\overset{\frown}{baf} > \overset{\frown}{bae}$, daher $\overset{\frown}{bef} > \overset{\frown}{be}$ ꝛc.

Anm. Daraus ist zugleich klar, daß kein Peripheriewinkel von 2 Durchmessern gebildet werden kann.

35. Wenn die Schenkel eines Peripheriewinkels und die eines Centriwinkels einen u. ebendenselben Bogen des Kreises einschließen, so heißen sie einander zugehörige Centri- u. Peripheriewinkel, als Fig. 9. $\overset{\frown}{m}$ u. $\overset{\frown}{n}$. Vergleichen wir solche in den 3 Fällen (§. 34.), so ist

1) $\overset{\frown}{adb} \overset{\sim}{=} \overset{\frown}{ead}$ (§. 30.), $\overset{\frown}{m} = \overset{\frown}{q}$ (§. 20, b) folgl. $\overset{\frown}{bd} = \overset{\frown}{ae}$ (§. 33.), daher $\overset{\frown}{n} = \overset{\frown}{o}$ (§. 14.) Es ist aber $\overset{\frown}{m} = \overset{\frown}{n} + \overset{\frown}{o}$ (§. 24, a) $= 2\,n$, mithin $\frac{1}{2}\,m = n$;

Digitized by Google

2) daher ist Fig. 10. $\hat{dab} = \frac{1}{2}\hat{dcb}$, $\hat{bae} = \frac{1}{2}\hat{bce}$, folgl. $\hat{dae} = \frac{1}{2}\hat{dce}$ (I, 27.);

3) endlich $\hat{baf} = \frac{1}{2}\hat{bcf}$, folgl. $\hat{baf} - \hat{bae} = \frac{1}{2}\hat{bcf} - \frac{1}{2}\hat{bce}$, d. i. $\hat{eaf} = \frac{1}{2}\hat{ecf}$ (I., 27.)

In allen 3 Fällen ist daher der Peripheriewinkel *halb so groß als sein Centriwinkel*, oder der Peripheriewinkel wird von der *Hälfte seines Bogens gemessen* (§. 32.)

Anm. Aus 2) folgt, daß *jeder Winkel im Halbkreise* Fig. 9. $\hat{adb} = \hat{R}$.

36. Daraus ergiebt sich nun,

1) daß *alle Peripheriewinkel in ebendemselben Kreise sich wie ihre Bogen verhalten und einander gleich sind wenn sie einerlei oder gleiche Bogen haben und umgekehrt*, als Fig. 11. $\hat{deb} = \hat{dab} = \hat{dgb}$, und, wenn $\overset{\frown}{ag} = \overset{\frown}{db}$, $\hat{deb} = \hat{abg}$ ꝛc.

2) daß wenn in einem Kreise *ein Peripheriewinkel bestimmt* ist, auch *sein Bogen bestimmt* ist, und umgekehrt.

c. Tangent. Winkel.

37. Wenn eine Linie den Kreis nur *in einem Punkte berührt* (§. 28, b) so muß sie übrigens *ganz außerhalb des Kreises liegen*, wie Fig. 9. bf, aber mit einem vom Berührungspunkt aus gezogenen Halbmesser bc einen Winkel bilden (§. 18). Denkt man sich $\overline{gb}$, welche den Bogen in d durchschnei-

Digitized by Google

det, so fortgerückt, bis gb in die Lage bf kommt, folgl. Tang. wird, so fällt d in b und $\overline{ad}$ in $\overline{ab}$. Nun ist $\hat{adb} = \hat{R}$ (§. 35. Anm.) folgl. auch $\hat{adg} = \hat{R}$ (§. 20, a); und es bleibt $\hat{adg} = \hat{R}$ auch wenn $\overline{ad}$ in $\overline{ab}$ und $\overline{gb}$ in $\overline{bf}$ kommt, mithin auch $\hat{abf} = \hat{R}$, d. h. die Tangente macht mit dem aus dem Berührungsp. gezogenen Halbmesser allemal einen rechten Winkel.

38. Für den Tang. Winkel x ist $\hat{m}$ der zugehörige Centriwinkel und $\hat{n}$ sein Peripheriewinkel wegen $\overset{\frown}{bd}$. Es ist aber $\hat{n} + \hat{v} = \frac{1}{2}\hat{adb} = \hat{R}$ (§. 35.) $= \hat{x} + \hat{v}$ (§. 37.), folgl. $\hat{x} = \hat{n}$, $= \frac{1}{2}\overset{\frown}{bd}$, d. h. der Tangent. Winkel ist seinem Peripheriewinkel oder der Hälfte des Bogens zwischen s. Schenkeln gleich.

39. Daraus folgt, daß sich die Tang. Winkel wie ihre Bogen verhalten und gleich sind, wenn diese gleich. Z. B. Fig. 11. $\hat{dbf} \,..\, \hat{ebk} = \overset{\frown}{db} \,..\, \overset{\frown}{eb}$, desgl. $\hat{dbf} = \hat{iag}$, wenn $\overset{\frown}{db} = \overset{\frown}{ag}$.

40. Betrachten wir endlich auch Parallellinien im Kreise, als Fig. 11. ab ‖ gd, so ist $\hat{dab} = \hat{adg}$ (§. 22, b), folgl. $\overset{\frown}{db} = \overset{\frown}{ag}$ (§. 36.) und umgekehrt; d. h. die Bogen zwischen parallelen Sehnen sind gleich und umgekehrt.

Anm. Die Bestimmung der Winkel, welche

von Sekanten und Sehnen an der Periph. gebildet werden, ergiebt sich aus §. 24, a und §. 35.

B. Von den Linien und Winkeln in Hinsicht ihrer Größe.

41. Die Größe einer Linie, welche ihre Länge genannt wird, ist durch ihre Grenzpunkte bestimmt (§. 15, c), die Größe eines Winkels aber wird von einem Kreisbogen zwischen seinen Schenkeln gemessen (§. 32. ꝛc.). In sofern sie als Größen gedacht werden, müssen die Sätze der allgemeinen Größenlehre (I. §. 22. ꝛc.) von ihnen gelten. Nach diesen können wir aber den Werth einer Größe nur durch Vergleichung mit einer andern gleichartigen als Maaße zu unserer Erkenntniß bringen (I. §. 28). Es muß daher zur Erkenntniß der Längen eine gewisse Länge, und zu der der Winkel ein gewisser Bogen als Maaß angenommen werden.

1. Längenmaaß.

42. Das Längenmaaß hat man von der Größe des menschlichen Fußes entlehnt und daher Fuß oder Schuh genannt. Man pflegt es entweder nach 12 (Duodecimalmaaß), oder nach 10 (Decimalmaaß) in Zolle, Linien und Scrupel nicht nur einzutheilen, sondern auch daraus größere Maaße, Klafter, Ruthen und Meilen zusammenzusetzen. Die Ruthen, Fuße, Zolle und Linien bezeichnet man mit $^{\circ}\ ^{\prime}\ ^{\prime\prime}\ ^{\prime\prime\prime}$, als $5^{\circ}\ 7^{\prime}\ 3^{\prime\prime}\ 6^{\prime\prime\prime}$. Theilt man die Ruthe in $12^{\prime}$, so

Digitized by Google

wird ein solcher auch ein Werkfuß genannt. Bei der Feldmeßkunst pflegt man $1^{\circ} = 10' = 100'' = 1000'''$ zu theilen und dieses geometrisches Maaß zu nennen. Es verhält sich daher der Werkfuß zum geometr. = 5 .. 6. Ueberdieß sind die Längenmaaße in verschiedenen Ländern verschieden (s. Verzeichn. I. S. 330); die gebräuchlisten sind der Pariser Fuß $= 144'''$, der Rheinländs. = 139, 13 und der Englische = 135, 11 ... Par. Linien Mittelst der Regel de tri lassen die verschiedenen Maaße in einander verwandeln.

Anm. Längenmaaße der Griechen und Römer (pes? passus, stadium?) — Vorschläge für ein allgemeines Maaß von Wren, Huyghens, Bouger, Condamine und dem Nationalconvente in Frankreich.

43. Zur Ausmessung gerader Linien auf dem Felde bedient man sich hölzerner Maaßstäbe 5′, 6′, 10′ lang, oder der Meßkette, welche gewöhnlich 5° Länge hat. Zum Uebertragen auf dem Felde gemessener Längen aufs Papier hat man in den Reißzeugen verjüngte Maaßstäbe, eine Erfindung von Joh. Hommel (Prof. z. Leipzig), welche Tycho de Brohe 1553 bekannt gemacht hat.

2. Winkelmaaß.

44. Zu einem Grundmaaße für die Winkel theilt man uralter Gewohnheit gemäß die Periph. eines Kreises in 360 gleiche Theile, Grade genannt, jeden Grad in 60 Minuten, eine Minute in 60 Sekunden ꝛc., und bezeichnet sie wie die

Digitized by Google

Längen §. 42. z. B. 23° 27′ 46″. Es ist daher der Halbkreis = 180° = 2 R̂ (§. 30.) und 1 R̂ = 90° (§. 19.)

45. Zur Messung der Winkel auf dem Felde bedient man sich verschiedener genau eingetheilter Instrumente von Messing, welche entweder 90° (Quadrant), oder 60° (Sextant) oder 180° (Astrolabium) oder ganze Kreise (Theodolit, Bordasche Kr. ꝛc.) enthalten und entweder mit Dioptern oder auch mit Fernröhren versehen sind. Um auch Minuten und Theile derselben zu messen, ist ein beweglicher dazu zweckmäßig eingetheilter Bogen daran angebracht, welcher nach seinen Erfindern Nonius oder Wernier genannt wird. — Um Winkel auf das Papier überzutragen, hat man in Reißzeugen einen zu 1° oder ½° eingetheilten Halbkreis, Transporteur genannt.

[Einrichtung dieser Instrumentl. Geschichte ihrer Erfindung und Verbesserung.]

Digitized by Google

Zweiter Abschnitt.

Von den Flächenräumen. (Planimetrie.)

46. Die Vorstellung einer Fläche erlangen wir dadurch, daß wir eine Linie im Raume fortbewegt denken, und zwar erfordert die der ebenen Fläche eine gerade, die der krummen eine krumme Linie (§. 7.) Beide Arten von Flächen können nach Gestalt und Gehalt in Untersuchung gezogen werden (§. 5.); wir handeln aber hier blos von den Ebenen (§. 7.)

A. Von den Ebenen in Hinsicht ihrer Gestalten.

47. Die Gestalten der Ebenen hängen theils von der Zahl und Größe ihrer Grenzlinien (Seiten), theils von den Lagen derselben (Winkeln) ab (§. 18). Da aber wenigstens 3 L. zur Begrenzung einer Ebene erfordert werden, (§. 10, b) so kann nur von 3, 4, 5 . . . n seitigen Ebenen (wenn n jede ganze Zahl bedeutet) die Rede seyn. Die Anzahl der Winkel ist allemal der Zahl der Seiten gleich (§. 11.), daher die n-seitige Ebene (Vieleck) auch n Winkel hat. Es lassen sich aber die Flächengestalten theils an sich, sowohl ohne, als auch mit Beziehung auf die Kreisbegrenzung, theils

Digitized by Google

aber auch durch Vergleichung gleichartiger in Betrachtung ziehen.

1. Betrachtung einzelner Ebenen.

a. Dreiseitiger. — (Dreiecke.)

48. Ein Dreieck ist in Hinsicht der Seiten

1) entweder gleichseitig, wenn alle 3 Seiten gleich als Fig. 12. △ abd;

2) oder gleichschenklich, wenn 2 Seiten gleich als △ def;

3) oder ungleichseitig, wenn alle Seiten ungleich sind, als △ bde.

49. In Hinsicht der Winkel eines △ ist

1) die Summe derselben $= 2\,\hat{R}$ (§. 24.) $=$ 180° (§. 44.), mithin 2 W. eines △ $< 2\,\hat{R}$.

2) Wenn daher 2 Winkel bestimmt sind, so ist es auch der 3te als die Ergänzung zu 180° (I. 24.)

50. Daraus folgt, daß wenn

1) ein △ 1 $\hat{R}$ hat, wo es rechtwinklich heißt, die Summe der übrigen auch $= 1\,\hat{R}$, folglich beide spitz seyn müssen. Die dem $\hat{R}$ entgegenliegende Seite heißt Hypotenuse, die daran liegenden Katheten (§. 19, a).

2) Hat ein △ 1 stumpfen Winkel (stumpfwinklich △) so sind die übrigen beiden spitz (§. 19, b. §. 49, 1.)

Digitized by Google

3) Sind alle 3 Winkel spitz, folglich jeder $< \hat{R}$, so heißt das △ spitzwinklich.

51. Wenn man sich nun irgend ein △ in einen Kreis so denkt, daß die Spitzen desselben in der Peripherie liegen, mithin die Seiten des △ Sehnen sind, als Fig. 12. △ bde, so ist $\hat{ebd} = \frac{1}{2}\overset{\frown}{ed}$, $\hat{deb} = \frac{1}{2}\overset{\frown}{bd}$, $\hat{edb} = \frac{1}{2}\overset{\frown}{be}$ (§. 35); daher $\hat{ebd} + \hat{deb} + \hat{edb} = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{ed} + \overset{\frown}{bd} + \overset{\frown}{be}) = \frac{1}{2}.\ 360° = 180° = 2\ \hat{R}$ (§. 44). Nun ist aber in jedem △ die Summe der Winkel $= 2\ \hat{R}$ (§. 49, 1); daher kann durch die Spitzen der Winkel eines jeden △ ein Kreis gedacht werden.

52. Da bei jedem im Kreise gedachten △ die Seiten Sehnen sind, so ergeben sich aus §. 30. die Bedingungen, unter welchen ein △ nach allen seinen Elementen bestimmt ist.

1) wenn alle 3 Seiten bestimmt sind, so sind auch alle 3 außerhalb des △ gelegenen Bogen, folgl. auch die ihnen entgegenliegenden Winkel bestimmt (§. 35.);

2) wenn zwei Seiten und der zwischen ihnen liegende Winkel bestimmt sind, als Fig. 13. im △ abd, $\overline{ab}$, $\overline{bd}$, $\hat{abd}$, so sind auch $\overset{\frown}{ab}$, $\overset{\frown}{bd}$ und $\overset{\frown}{ad}$, folglich auch $\hat{d}$, $\hat{a}$ und $\overline{ad}$ (§. 36, 2), d. i. alle übrige Elemente des △ bestimmt.

Digitized by Google

3) wenn eine Seite und zwei Winkel bestimmt sind, als Fig. 13. $\overline{ab}$, $\hat{dab}$, $\hat{abd}$, so sind auch $\overset{\frown}{ab}$, $\overset{\frown}{bd}$, $\overset{\frown}{ad}$, mithin auch $\hat{d}$, $\overline{db}$, $\overline{ad}$, d. i. alle übrigen Elemente bestimmt.

Anm. Wenn 2 Seiten und 1 der einen bestimmten Seite entgegenliegender Winkel, z. B. Fig. 13. $\overline{ab}$, $\overline{bd}$, $\hat{d} = \hat{e}$ (§. 36, 1) bestimmt sind, so ist das △ unbestimmt. Denn es sei bf ein Durchmesser, folglich $\overset{\frown}{baf} \cong \overset{\frown}{bdf}$ (§. 30.); daher kann $\overline{db}$ auch die Lage $\overline{eb}$ haben, mithin 2 △△, abd und abe, entstehen. Dagegen ist das △ bestimmt, wenn der bestimmte Winkel der größern der bestimmten Seiten entgegen liegt, als △ abe, wenn $\hat{eab}$ bestimmt ist (§. 30).

53. Wenn nun bei 2 oder mehrern △△, als Fig. 14. △ abc und △ def eine und ebendieselbe jener 3 Bedingungen (§. 52.) statt findet, und die 3 zur Bestimmtheit des △ nöthigen Elemente (§. 52, 1. 2. 3.) in einem △ abc, denen in dem andern △ def gleich sind, so sind alle Elemente des einen △ allen unter gleichen Bedingungen gedachten, des andern △ gleich. Solche △△ nennt man congruent oder identisch; und es findet daher die Congruenz oder Identität der △△ statt:

1) wenn alle 3 Seiten des einen, allen 3 Seiten des andern △ gleich sind;

Digitized by Google

als Fig. 14. wenn $\overline{ac} = \overline{df}$, $\overline{ab} = \overline{de}$, $\overline{bc} = \overline{ef}$, so ist $\hat{a} = \hat{d}$, $\hat{b} = \hat{e}$, $\hat{c} = \hat{f}$ (§. 52, 1).

2) wenn 2 Seiten und der zwischen liegende Winkel im △ abc, 2 Seiten und dem zwischenliegenden Winkel im △ def (oder auch die den größern Seiten entgegenliegenden Winkel (§. 52. Anm.) gleich sind, als wenn $\overline{ab} = \overline{de}$, $\overline{ac} = \overline{df}$ und $\hat{a} = \hat{d}$ (oder auch, wenn $\overline{ac} \gtrless \overline{ab}$, $\overline{df} \gtrless \overline{de}$, $\hat{b} = \hat{e}$), so ist $\overline{bc} = \overline{ef}$ (§. 52, 2) u. s. w, (v. 1).

3) wenn eine Seite und 2 Winkel im △ abc gleich einer Seite und 2 Winkeln im △ def, als $\overline{ab} = \overline{de}$, $\hat{a} = \hat{d}$, $\hat{b} = \hat{e}$, so ist $\overline{ac} = \overline{df}$, $\overline{bc} = \overline{ef}$, $\hat{c} = \hat{f}$ (§. 52, 3. §. 49, 2).

54. Um ferner zu untersuchen, in welcher Beziehung die Seiten eines △ mit seinen Winkeln stehen, braucht man jene nur als Sehnen der Bogen zu betrachten, welche die Winkel messen (§. 51. §. 35). Es sei Fig. 12. $\overline{ad} = \overline{db}$, $\overline{ac} = \overline{cb}$, $\overline{cd} = \overline{\quad}$ (§. 27, a), so ist $\hat{acd} = \hat{bcd}$ (§. 52, 1), folglich $\overset{\frown}{ad} = \overset{\frown}{db}$, (§. 33.) d. h. gleiche Sehnen haben gleiche Bogen, u. umgekehrt.

§. 55. Dieses auf die 3 Arten der △△ (§. 48.) angewendet giebt, folgende Sätze:

Digitized by Google

1) wenn △ gleichseitig Fig. 12. $\overline{ab} = \overline{ad} = \overline{db}$, so ist $\overset{\frown}{ab} = \overset{\frown}{ad} = \overset{\frown}{bd}$ (§. 54.), mithin $\hat{d} = \hat{b} = \hat{a}$ (§. 36) $= \frac{360°}{3} = 60°$. Umgekehrt, wenn jeder Winkel $= 60°$, so ist △ gleichseitig;

2) wenn △ gleichschenklich $\overline{de} = \overline{df}$, so ist $\overset{\frown}{de} = \overset{\frown}{df}$ (§. 54.) folglich $\hat{efd} = \hat{def}$ (§. 36.) d. h. die Basiswinkel sind gleich und umgekehrt.

3) wenn △ ungleichseitig, so sind die Bogen, mithin auch die entgegenliegenden Winkel ungleich, und umgekehrt.

Anm. Da im gleichschenklichen △ def, $\hat{e} = \hat{f}$, folglich $\hat{e} + \hat{f} = 2\hat{f}$, so ist $\hat{edf} = 180° - 2\hat{f}$ (§. 49, 2.) $= 2(90° - \hat{f})$; desgl. $2\hat{f} = 180° - \hat{edf}$, folglich $\hat{f} = \frac{(180° - \hat{edf})}{2}$.

56. Aus §. 54. folgt auch, daß dem kleinern Bogen eine kleinere Sehne zugehört, als dem größern, und umgekehrt, als Fig. 13. $\overset{\frown}{ae} < \overset{\frown}{bae}$, folglich $\overline{ae} < \overline{eb}$. Es kommen aber jeder Sehne 2 Bogen zu (§. 30.), als $\overline{eb}$, $\overset{\frown}{bae}$ und $\overset{\frown}{bde}$, welche zusammen die Peripherie ausmachen; weshalb, wenn ein Bogen $= x°$,

Digitized by Google

mithin der andere 360° — x° (§. 44), Sehne x° = Sehne (360° — x°). Es wachsen daher die Sehnen nur bis 180° (§. 29.) und nehmen von 180° bis 360° wieder ab; folglich gilt der Satz nur von Bogen, welche kleiner als 180° sind.

Anm. Daraus liegt zugleich, daß der Durchmesser die größte Sehne ist und jede andere Sehne kleiner, als er.

57. Wenn wir nun auch die 3 Arten der △△ §. 50. im Kreise betrachten (§. 51.), so ergiebt sich

1) daß die Hypotenuse eines rechtwinkl. △ ein Durchmesser, die Katheten aber Sehnen von Bogen < 180° seyn müssen (§. 50, 1 §. 35), s. Fig. 9. △ abd;

2) daß im stumpfwinkl. △ Fig. 13. abe die dem stumpfen Winkel entgegenliegende Seite be die Sehne $\overset{\frown}{bdfe}$ = Sehne 180° + ef = Sehne (180° — ef) (§. 56), folglich $\overline{ab}$ und $\overline{ae}$ Sehnen kleinerer Bogen als (180° — ef) seyn müssen;

3) daß im spitzwinkl. △ jede Seite Sehne eines Bogens < 180° seyn muß, als Fig. 13. im △ abd. In allen △△ liegt daher die größere Seite dem größern Winkel gegenüber, und umgekehrt.

58. Weil nach §. 35. $\hat{a} = \frac{1}{2}\overset{\frown}{bd}$ (Fig. 15), folglich $\overset{\frown}{bd} = 2\hat{a}$, mithin $\overset{\frown}{ad} = 2\hat{b}$ ꝛc. so

Digitized by Google

verhält sich $\overline{ad}$ . . $\overline{bd}$ = Sehne $\overset{\frown}{ad}$ . . Sehne $\overset{\frown}{bd}$ = Sehne 2 $\hat{b}$ . . Sehne 2 $\hat{a}$, desgleichen $\overline{ad}$ . . $\overline{ab}$ = Sehne 2 $\hat{b}$ . . Sehne 2 $\hat{d}$ ꝛc., d. h. die Seiten eines △ verhalten sich, wie die Sehnen der doppelten Winkel, welche ihnen entgegen liegen.

59. Um diesen Satz anzuwenden, ist nöthig, daß die Sehnen der Bogen eines Kreises von 0° bis 180° (§. 56.) nach der beständigen Sehne, dem Durchmesser, durch Zahlen bestimmt seyen. Die Berechnung derselben unternahm schon Hipparchos a. Nicäa (140 v. Ch.), Claud. Ptolemäus zu Alexandrien (137 n. Ch.) aber führte sie aus und entwarf eine Tafel der Sehnen von $\frac{1}{4}$° zu $\frac{1}{4}$°. — Allein im 9ten Jahrh. n. Ch. erfanden arabische Mathematiker zur Vergleichung der Seiten eines △ mit den entgegenliegenden Winkeln einen bequemern Satz (§. 61).

60. Weil nämlich die Winkel eines △ im Kreise von den Hälften der zwischen seinen Schenkeln liegenden Bogen gemessen werden (§. 51. §. 35.), so theilt man die Bogen in 2 gleiche Theile, Fig. 15. $\overset{\frown}{af} = \overset{\frown}{df}$, $\overset{\frown}{bg} = \overset{\frown}{gd}$; daher wenn man cf, eg, ac, cd und bc zieht, $\hat{acf} = \hat{dcf}$, $\hat{bcg} = \hat{dcg}$ ꝛc. (§. 33.), folglich $\hat{dcf} = \hat{b}$, $\hat{dcg} = \hat{a}$ ꝛc. (§. 35). Da nun △ ace $\overset{\sim}{=}$ △ dce (§. 53, 2), so ist $\overline{ae} = \overline{de}$, und $\hat{aec} = \hat{dec} = \hat{k}$ (§. 19, 2); aus glei-

Digitized by Google

chem Grunde $\overline{dk} = \overline{bk}$, $\overset{\frown}{ckd} = \overset{\frown}{bkc} = \overset{\frown}{R}$, ꝛc. d. h. jeder Halbmesser, welcher einen Bogen in 2 gleiche Theile theilt, theilt auch die Sehne desselben unter rechten Winkeln in 2 gleiche Theile, und umgekehrt.

61. Die halben Sehnen hat man nun in Beziehung auf ihre halben Bogen, oder von diesen gemessenen Winkeln (zufällig) die Sinus *) derselben genannt; als Fig. 15. $\overline{ed}$ = Sin. $\overset{\frown}{dcf}$ = Sin. $\overset{\frown}{b}$ (§. 60), $\overline{dx}$ = Sin. $\overset{\frown}{dcg}$ = Sin. $\overset{\frown}{a}$ ꝛc. Da sich nun die Ganzen verhalten, wie die halben, so ist $\overline{ad} \,.\, \overline{db} = \frac{1}{2}\overline{ad} \,.\, \frac{1}{2}\overline{bd} = \overline{ed} \,.\, \overline{dk}$ = Sin. $\overset{\frown}{b}$ . . Sin. $\overset{\frown}{a}$, desgleichen $\overline{ad} \,.\, \overline{ab}$ = Sin. $\overset{\frown}{b}$ . . Sin. $\overset{\frown}{d}$, endlich $\overline{db} \,.\, \overline{ab}$ = Sin. $\overset{\frown}{a}$ . . Sin. $\overset{\frown}{d}$, d. h. die Seiten des △ verhalten sich, wie die Sinus der ihnen entgegenliegenden Winkel.

62. Zur Anwendung dieses Satzes hat man blos die Hälften der Sehnen von 0° bis 180° (§. 59.), mithin die Sinus der Bogen oder Winkel von 0° bis 90° in Tafeln gebracht, wo Sin. 90° = radius ist und Sinus totus genannt wird.

*) Der Name Sinus scheint mit durch Uebersetzung des arabischen Wortes chozen, welches eine senkrechte Linie von der Schulter herab, die Seite, aber auch den Busen bedeutet, entstanden und von Geber ben Afla in s. Erlaut. des Almagests des Cl. Ptolemäus eingeführt zu seyn.

Zur

Zur Berechnung der Sinus hat man verschiedene kunstreiche Methoden erfunden, welche zu denen gehören, die zur Berechnung der von den Kreisbogen abhängigen Linien und umgekehrt, dienen, und deren Inbegriff man Cyklotechnie nennt.

63. Aber jene Sätze §. 58. und §. 60. sind nur anwendbar, wenn Seiten mit ihren entgegenliegenden Winkel eines △ in Beziehung kommen. Man hat daher für die Fälle, wo dieses nicht statt findet, noch andere Sätze und Formeln ausgemittelt. Dadurch ist ein besonderer Zweig der Geometrie entstanden, welche die Theorie der △△ in Beziehung auf §. 61. enthält, und Trigonometrie genannt wird.

64. Aus §. 60. folgt umgekehrt, daß der Mittelpunkt des Kreises, welcher durch die Spitzen des △ geht (§. 51.), gefunden wird, wenn man aus der Mitte zweier Seiten des △ rechtwinkliche Linien nach der Richtung zieht, nach welcher sie convergiren (§. 18.), als Fig. 15. $\overline{ec}$ und $\overline{kc}$.

Anm. Da die Spitzen eines △ 3 Punkte sind, so gilt dieses Verfahren auch, um durch 3 Punkte, welche nicht in gerader Linie liegen, einen Kreis zu ziehen. Dies ist ein besonderer Fall des weit allgemeinern Problems des Apollonius von Perga (um 200 v. Chr.): Wenn von Punkten, geraden Linien oder Kreisen je 3 Stücke in einer Ebene bestimmt sind, einen Kreis so zu beschreiben, daß er durch die

Digitized by Google

bestimmten Punkte geht, und die bestimmten Linien berührt. Die verlorne Schrift des Apollonius darüber ist von Camerer (1795) und von Haumann (1817) wiederherzustellen versucht worden.

65. Wenn man endlich 2 Seiten eines △ zusammen genommen mit der dritten vergleicht, so ergiebt sich, daß jene zusammen größer sind, als diese. Denn trägt man 2 Seiten auf die dritte, als Fig. 20. ai = ac, bk = bc, so ist ac + bc = ai + bk = ab + ki, folglich ac + bc > ab.

Anm. 1. Dieser Satz auf die Sehnen eines Kreises angewendet, beweißt zugleich, daß unter allen Sehnen der Durchmesser die größte ist. Z. B. Fig. 9. ac + cd = ab > ad (§. 27, a).

Anm. 2. Hieraus ergiebt sich auch, daß zwischen 2 Punkten die gerade Linie die kürzeste ist.

b. Vierseitige Ebenen. — (Vierecke.)

66. In einer vierseitigen Ebene, welche 4 Winkel hat (§. 47.), können die Seiten

1) entweder alle 4, oder 3, oder nur 2 einander gleich,
2) oder je 2 einander gleich,
3) oder alle 4 einander ungleich seyn.

67. In Hinsicht der Lagen der 4 Seiten können

1) entweder je 2 parallel liegen (§. 24, b), wo das

Digitized by Google

Viereck ein Parallelogramm heißt, als Fig. 16. acbd;

2) oder 2 S. ∦, die andern beiden nicht ∥ seyn, wo man das Viereck ein Trapez, auch Paralleltrapez nennt, als Fig. 17. cebd;

3) oder keine S. einer andern ∥, wo es ein Trapezoid oder überhaupt ein irregulaires Viereck genannt wird, als Fig. 27. abcd,

68. In jedem Vierecke läßt sich aus der Spitze eines Winkels in die Spitze des ihm entgegenliegenden Winkels eine Linie denken, welche Diagonale heißt, und das Viereck in 2 △△ theilt (Fig. 16. 17. 27). Es ist daher die Summe der Winkel eines Vierecks $= 4\hat{R}$ (§. 49, 1.) $= 360°$ (§. 44); folglich, wenn 3 Winkel bestimmt sind, so ist es auch der 4te, und sind alle Winkel einander gleich, so ist jeder $= 1\hat{R}$.

69. Ist ein Viereck ein Parrallelogramm (§. 67, 1), als Fig. 16. ab ∥ cd, ac ∥ bd, so ist $\hat{a} + \hat{c} = \hat{b} + \hat{d} = \hat{a} + \hat{b} = \hat{c} + \hat{d} = 2\hat{R}$ (§. 22, 3), mithin $\hat{a} = \hat{d}$, $\hat{b} = \hat{c}$. Die Diagonale ad theilt es in 2 congruente △△, als △ abd $\tilde{=}$ △ acd (§. 22, 2. §. 53, 3), daher ab = cd, ac = bd; d. h. in jedem Parallelogramm sind sowohl die entgegenliegenden Winkel, als auch die entgegenliegenden Seiten einander gleich.

Anm. Ohne Rücksicht auf die Fläche heißt der

Digitized by Google

letztere Theil dieses Satzes auch so: Parallellinien zwischen Parallellinien sind einander gleich.

70. Daraus folgt, daß wenn in einem Parallelogramme ein Winkel bestimmt ist, alle Winkel bestimmt sind. Ist daher ein Winkel $= \hat{R}$, so ist jeder W. $= \hat{R}$, als Fig. 17. in ecdf, und ist $\hat{a} < \hat{R}$, so ist $b = 2\,R - a$ (§. 69).

71. Ist nun ein Parallelogram

1) gleichwinklich mithin jeder Winkel $= \hat{R}$ (§. 68.), so ist das P. auch rechtwinklich und es können

α. entweder alle 4 Seiten einander gleich seyn (§. 66, 1.), wo es ein Quadrat,

β. oder die einander entgegenliegenden Seiten einander gleich (§. 69.) und die anliegenden ungleich (Fig. 17.) cdef, wo es ein Rechteck (oblongum) heißt.

2) Sind aber die Winkel $\gtrless$ und $< \hat{R}$, so ist das Parallelogram schiefwinklich. Sind darin

α. alle 4 Seiten gleich, so heißt es Raute oder Rhombus;

β. sind aber nur die entgegenliegenden Seiten gleich, die anliegenden ungleich, Rhomboide.

Anm. Die beiden letztern Arten nennt man auch verschobene Quadrate und verschobene Rechtecke.

72. Durch die Diagonalen der Parallelo-

Digitized by Google

gramme entstehen alle §. 48. und 50. angeführte Arten von $\triangle\triangle$, von welchen alles gilt, was von $\triangle\triangle$ überhaupt gilt §. 51. ꝛc.

73. Sind in einem Vierecke nur 2 Seiten $\parallel$, als Fig. 17. cebd, cd $\parallel$ eb (Trapez §. 67, 2), so ist $\hat{c} + \hat{e} = \hat{b} + \hat{d} = 2\,\hat{R}$ (§. 22, 3.)

74. Wenn endlich in einem Vierecke keine Seite einer andern $\parallel$ ist (Trapezoide §. 67, 3), so sind je 2 zunächst liegende Winkel $< 2\,\hat{R}$. Die Seiten, welche theils gleich, theils ungleich seyn können, lassen sich als Seiten der $\triangle\triangle$ bestimmen, welche durch die Diagonale (§. 68.) entstehen.

75. Denken wir nun auch ein Viereck in der Kreis-Begrenzung, so daß alle 4 Spitzen in der Peripherie liegen, als Fig. 11. bdge, so sind $\hat{e} + \hat{d} = \hat{b} + \hat{g} = 2\,\hat{R}$ (§. 35). Umgekehrt folgt, daß sich um ein Viereck ein Kreis beschreiben läßt, wenn die entgegenliegenden Winkel zusammen $= 2\,\hat{R}$, daher um jedes Quadrat und jedes Rechteck (§. 71, 1).

76. Wenn aber Vierecke diese Beschaffenheit nicht haben, so können doch durch 3 Spitzen derselben Kreise gezogen werden (§. 64. Anm.), wo die 4te entweder innerhalb, oder außerhalb der Peripherie liegt. Durch Beziehung derselben auf

Digitized by Google

den Kreis, entstehen ähnliche △△; daher sie erst §. 101. ꝛc. in Betrachtung gezogen werden können.

c. Fünfseitige Ebenen. — (Fünfecke.)

77. In einer fünfseitigen Ebene, welche 5 Winkel hat (§. 47), können 5, 4, 3, 2 oder auch keine Seite der andern gleich seyn. Durch 1 Diagonale wird es in ein Viereck und ein Dreieck, mithin durch 2 Diagonale in 3 Dreiecke (§. 68.) getheilt. Jenes Viereck kann von jeder möglichen Art seyn (§. 66. 67.), daher auch 2 Seiten des Fünfecks einander ∥.

78. Da 2 von einem Punkte ausgezogenen Diagonalen die fünfseitige Ebene in 3 △△ theilen, so ist die Summe der Winkeln derselben $= 3.2\hat{R} = 6\hat{R}$ (§. 49, 1). Sind daher alle Winkel einander gleich, so ist jeder $= \frac{6}{5}\hat{R} = \frac{6}{5}.90^\circ = 108^\circ$.

79. In einem Fünfecke im Kreise Fig. 11. agdbe, müssen, wenn man die Diagonalen ed, eg zieht, $\hat{gae} + \hat{gde} = \hat{agd} + \hat{aed} = 2\hat{R}$ (§. 75), desgleichen $\hat{ebd} + \hat{egd} = 2\hat{R} = 180^\circ$ seyn. Hat ein Fünfeck diese Beschaffenheit, so läßt sich durch die Spitzen desselben ein Kreis ziehen.

80. Hat nun ein Fünfeck im Kreise 5 gleiche Winkel, als Fig. 18. $\hat{a} = \hat{b} = \hat{d} \ldots = 108^\circ$ (§. 78), so ist $\hat{bdf} + \hat{baf} = 180^\circ$ (§. 79.)

Digitized by Google

$= 108° + \hat{baf}$, folglich $\hat{baf} = 72°$, und aus gleichem Grunde $\hat{abf} = 72°$, mithin $\hat{afb} = 36°$ (§. 49, 2). Da aber auch $\hat{eab} = \hat{abd} = 108°$, so ist auch $\hat{eaf} = 36°$, folglich $\hat{afe} = 36°$, desgleichen $\hat{dbf} = 36° = \hat{bfd}$. Es folgt daher aus §. 36. und §. 54., daß $\overline{ab} = \overline{bd} = \overline{df} = ef = ae$, mithin das Fünfeck gleichseitig ist. — Ein gleichwinkliches und gleichseitiges Fünfeck aber heißt sein regulaires.

81. Umgekehrt folgt, aus §. 54. und §. 36, daß ein gleichseitiges Fünfeck im Kreise 5 gleiche Winkel hat. Zieht man nun Fig. 18. $\overline{ac}$, $\overline{bc}$, $\overline{cd}$ ꝛc. so wird das Fünfeck in 5 gleichschenkliche (§. 27, a) congruente $\triangle\triangle$ getheilt (§. 53, 1), welche mit ihren Spitzen in c zusammenfallen. Daher $\hat{c} = \frac{360}{5} = 72°$, $\hat{cab} + \hat{abc} = 180° - 72° = 108°$ (§. 49.) folglich $\hat{cab} = \hat{abc} = 54°$ (§. 55, 2)

82. Wenn man dagegen im regulairen Fünfeck (§. 80.) jeden Winkel in 2 gleiche Theile theilt, so folgt nach §. 53, 3 und §. 60., daß um jedes regulaire Fünfeck ein Kreis gezogen werden kann.

Anm. Die Methoden der Verzeichnung regulärer Fünfecke gründen sich auf §. §. 80—82; vergl. §. 87.

Digitized by Google

d. Vielseitige Ebenen — (Vielecke oder Polygone.)

83. Auf dieselbe Weise lassen sich auch die 6, 7, 8 . . . n-seitigen Ebenen (Vielecke) in Untersuchung ziehen. Ein n-eck, welches n Winkel hat (§. 47.) läßt sich von der Spitze eines Winkels aus mittelst (n — 3) Diagonalen in (n — 2) $\triangle\triangle$ theilen, daher die Summe der Winkel des n-ecks $= (n - 2)\ 2\ \hat{R}$ (§. 49, 1) $= (2n - 4)\ \hat{R}$ $= (n - 2)\ 180^\circ = n.180^\circ - 360^\circ$. Sind alle Winkel einander gleich, so ist jeder $= 2\frac{(n-2)}{n} \cdot \hat{R}$ $= 180^\circ - \frac{360^\circ}{n} = \frac{(n-2)}{n} . 180^\circ =$ $90^\circ + \frac{90^\circ\ n - 360^\circ}{n} = 90^\circ + \frac{90^\circ}{n}\ (n - 4)$.

84. Alle Vielecke werden in 2 Hauptarten getheilt. Sie haben nämlich entweder lauter gleiche Seiten und gleiche Winkel, wo sie regulaire; oder nicht, wo sie irregulaire genannt werden. Für letztere kann es daher keine allgemeinen Regeln geben, und sie werden als ein Aggregat von $\triangle\triangle$ betrachtet, worein sie zerlegt werden können. (§. 83).

85. Sind aber in einem n-ecke alle n Seiten und alle n Winkel, Polygonwinkel genannt, gleich, und man zieht aus der Spitze jedes Polygonw. durch die Sehne seines Bogens rechtwinklich Linien, so theilen sie die Sehnen in 2 gleiche

Digitized by Google

Theile (§. 60), daher auch den Polygonwinkel selbst (§. 53, 1); sie sind alle einander gleich (§. 53, 3), treffen einander in einem Punkte (§. 59. sind mithin Halbmesser eines durch alle Spitzen des Vielecks gehenden Kreises, welche mit den Seiten des n-ecks n congruente $\triangle\triangle$ bilden. Daraus folgt zugleich, daß um jedes Vieleck ein Kreis, und umgekehrt, in jeden Kreis ein regulaires Vieleck geschrieben werden kann.

86. Da in einem regulairen n-ecke jeder Polygonwinkel $= \frac{(n-2)}{n} 180°$ (§. 83), alle Seiten aber einander gleich (§. 84), $=$ der Sehne $\frac{360°}{n}$ so ist, wenn eine Seite bestimmt ist, das ganze Vieleck folglich auch der Kreis bestimmt (§. 85), der um dasselbe beschrieben werden kann; und ist dieser bestimmt, so ist auch die Sehne $\frac{360°}{n}$, folglich auch das ganze Vieleck bestimmt.

87. Darauf beruhen die Methoden der Verzeichnung regulairer Vielecke.

1) Wenn die Seite des n-ecks bestimmt ist, so kann man

α. entweder alle n Seiten unter dem Polygonwinkel $= \frac{(n-2)}{n} \cdot 180°$ an einander setzen;

β. oder nur 2 Seiten unter dem Polygonwinkel verbinden und nach §. 64. den Mittel-

Digitized by Google

punkt des Kreises suchen, in welchen die bestimmte Seite n mal paßt. — Den Polygonwinkel kann man entweder mit dem Transporteur (§. 45.) abmessen, oder, da $\frac{(n-2).}{n}$ $180° = 90° + \frac{90}{n}(n-4)$, (§. 83.) so bestimmen, daß man mit der Seite einen Bogen $> 90°$ beschreibt, $90°$ in n gleiche Theile theilt und $n-4$ derselben zu letztern $90°$ setzt;

γ. oder man beschreibt über der gegebenen Seite, z. B. Fig. 18. ab ein gleichschenkliches $\triangle$ abc so, daß $\hat{cab} = \hat{abc}$ (§. 55, 2.) $= \frac{(n-2).}{n}\ 90°$ ($\frac{1}{2}$ Polygonwinkel) $= 90° - \frac{180°}{n}$, wodurch $\hat{acb} = \frac{360°}{n}$, und aus c mit ac einen Kreis, worein ab n-mal getragen werden kann (§. 86).

2) Wenn der Kreis für ein regulair. n-eck gegeben ist, so kann man ihn

α. entweder in n gleiche Theile theilen, jeden $= \frac{360°}{n}$, und die Sehnen ziehen,

β. oder vom Mittelpunkt aus unter Winkel $= \frac{360°}{n}$ Halbmesser ziehen und die Durchschnittspunkte der Peripherie verbinden,

Digitized by Google

γ. oder, da $\frac{360^\circ}{n} = 4.\ \frac{90^\circ}{n}$ ist, einen Quadranten in n gleiche Theile theilen und die Sehne des Bogens von 4 Theilen ziehen.

Anm. 1. Die Seiten der regulairen 3, 4, 5, 6 . . . . bis 12-ecke für einen gegebenen Kreis finden sich auch durch besondere Linien in demselben Fig. 19.

1) Seite des regulairen 3-ecks = gk, wo ce = $\frac{1}{4}$ cb
2) " " " 4 " = ad, " $\hat{acd} = \hat{R}$
3) " " " 5 " = df, " ef = ed
4) " " " 6 " = cd = radius.
5) " " " 7 " = eg, (nicht genau).
6) " " " 8 " = dm, wo $\overset{\frown}{dm} = \frac{1}{2}\overset{\frown}{ad}$
7) " " " 9 " = gn, wo $\overset{\frown}{gn} = \frac{1}{3}\overset{\frown}{gbk}$
8) " " " 10 " = cf, = (ed — ce) (vergl. N. 3.)
9) " " " 11 " = en, (nicht genau)
10) " " " 12 " = dg (vergl. N. 1).

Anm. 2. Die Regel des Renaldini trifft zwar nur beim regulairen Viereck genau zu, ist jedoch bei kleinen Vielecken ohne merklichen Fehler anwendbar.

88. Theilt man den Kreis in n gleiche Theile und zieht an die Theilungspunkte Tangenten, so entsteht ein regulaires n-eck außer dem Kreise, denn da jeder Tangentenwinkel $= \frac{180^\circ}{n}$ (§. 38), mithin beide $= \frac{360^\circ}{n}$, so ist der Winkel am Durch-

Digitized by Google

schnittspunkte $= 180° - \frac{360°}{n}$ (§. 49, 2) $=$ $180°.\frac{(n-2.)}{n}$ = Polygonwinkel (§. 83).

89. Das Verhältniß des Halbmessers des Kreises zu der Seite eines bestimmten Vielecks, mithin auch zum Umfange desselben, sowohl in als außer dem Kreise läßt sich mit Zuziehung anderer geometrischen Lehrsätze durch Rechnung finden. Die Methoden der Berechnung aber gehören zu der Cyklotechnie (vergl. §. 62).

e. Kreis.

90. Je größer die Anzahl der Seiten eines regulairen Vielecks ist, desto kleiner ist die Sehne (§. 32), desto näher liegt sie der Peripherie, als Fig. 19. $\overline{dm}$ näher als $\overline{ad}$. Daher läßt sich der Umfang eines Vielecks von einer sehr großen Seitenzahl ohne merklichen Unterschied der Peripherie gleich setzen. Durch Berechnung des Umfanges eines solchen Vielecks und Vergleichung mit dessen Durchmesser hat man sich dem wahren Verhältnisse der Peripherie zu ihrem Durchmesser $= p \,..\, d$, welches man $= \pi \,..\, 1$ setzt, bis aufs unbedeutende genähert, und $\pi = 3,14159....$ gefunden, welche Zahl von ihrem vornehmsten Berechner die Ludolphische genannt wird. Die Untersuchung dieses Verhältnisses selbst aber nennt man Quadratur des Cirkels oder Rectification des Kreises.

Anm. Wo es nicht auf große Genauigkeit an-

Digitized by Google

kommt, läßt ist d . . p = 100 . . 314 annehmen; genauer aber = 7 . . 22 oder = 113 . . 355. — Die Zahl π hat man auf 156 Decimalstellen berechnet, und ein rationales Verhältniß zwischen d . . p vergeblich gesucht. — Aber mittelst gewisser Sehnen des Kreises durch Construction eine gerade Linie = p zu finden, scheint nicht unmöglich zu seyn.

91. Aus d . . p = 1 . . π (§. 90.) folgt nun

1) die Peripherie $p = d\pi = 2r\pi$ (wenn r der Halbmesser),

2) der Durchmesser $d = \frac{p}{\pi} = 2r$, mithin $r = \frac{p}{2\pi}$. Weil aber die Division mit 3, 14159... unbequem ist, und $\frac{p}{\pi} = p \cdot \frac{1}{\pi}$ so hat Hübschen (1725) $\frac{1}{3,14159...}$ berechnet und = 0,318309886 .... gefunden. Daher ist d = p. 0,3183 ....

92. Endlich da der Bogen $1^\circ = \frac{p}{360}$ (§. 44.) $= \frac{d\pi}{360} = \frac{r\pi}{180}$ (§. 91, 1), so ist ein Bogen $n^\circ = \frac{n.d\pi}{360} = \frac{n.r.\pi.}{180}$ Umgekehrt sei Bogen $n^\circ = x$, so ist $d = \frac{x.360}{n.\pi} = \frac{360.}{n} x.\ 0,3183 ....$ und $r = \frac{180.}{n} x.\ 0,3183 ....$ (§. 91).

Digitized by Google

schnittspunkte $= 180° - \frac{360°}{n}$ (§. 49, 2) $=$ $180°.\frac{(n-2.)}{n}$ = Polygonwinkel (§. 83).

89. Das Verhältniß des Halbmessers des Kreises zu der Seite eines bestimmten Vielecks, mithin auch zum Umfange desselben, sowohl in als außer dem Kreise läßt sich mit Zuziehung anderer geometrischen Lehrsätze durch Rechnung finden. Die Methoden der Berechnung aber gehören zu der Cyklotechnie (vergl. §. 62).

e. Kreis.

90. Je größer die Anzahl der Seiten eines regulairen Vielecks ist, desto kleiner ist die Sehne (§. 32), desto näher liegt sie der Peripherie, als Fig. 19. $\overline{dm}$ näher als $\overline{ad}$. Daher läßt sich der Umfang eines Vielecks von einer sehr großen Seitenzahl ohne merklichen Unterschied der Peripherie gleich setzen. Durch Berechnung des Umfanges eines solchen Vielecks und Vergleichung mit dessen Durchmesser hat man sich dem wahren Verhältnisse der Peripherie zu ihrem Durchmesser $= p \,..\, d$, welches man $= \pi \,..\, 1$ setzt, bis aufs unbedeutende genähert, und $\pi = 3,14159....$ gefunden, welche Zahl von ihrem vornehmsten Berechner die Ludolphische genannt wird. Die Untersuchung dieses Verhältnisses selbst aber nennt man Quadratur des Cirkels oder Rectification des Kreises.

Anm. Wo es nicht auf große Genauigkeit an-

Digitized by Google

kommt, läßt ist d . . p = 100 . . 314 annehmen; genauer aber = 7 . . 22 oder = 113 . . 355. — Die Zahl π hat man auf 156 Decimalstellen berechnet, und ein rationales Verhältniß zwischen d . . p vergeblich gesucht. — Aber mittelst gewisser Sehnen des Kreises durch Construction eine gerade Linie = p zu finden, scheint nicht unmöglich zu seyn.

91. Aus d . . p = 1 . . π (§. 90.) folgt nun

1) die Peripherie p = d π = 2 r π (wenn r der Halbmesser),

2) der Durchmesser $d = \frac{p}{\pi} = 2r$, mithin $r = \frac{p.}{2\pi}$ Weil aber die Division mit 3, 14159... unbequem ist, und $\frac{p}{\pi} = p. \frac{1}{\pi}$ so hat Hübschen (1725) $\frac{1}{3,14159...}$ berechnet und = 0,318309886 .... gefunden. Daher ist d = p. 0,3183 ....

92. Endlich da der Bogen $1^0 = \frac{p}{360}$ (§. 44.) $= \frac{d\pi}{360} = \frac{r\pi}{180}$ (§. 91, 1), so ist ein Bogen $n^0 = \frac{n.d\pi}{360} = \frac{n.r.\pi.}{180}$ Umgekehrt sei Bogen $n^0 = x$, so ist $d = \frac{x.360}{n.\pi} = \frac{360.}{n} x.\ 0,3183 ....$ und $r = \frac{180.}{n} x.\ 0,3183 ....$ (§. 91).

Digitized by Google

2. Betrachtung ähnlicher Ebenen in gegenseitiger Beziehung;

a. dreiseitiger. — Dreiecke.

93. Wenn nun $\triangle\triangle$ gleiche Gestalt haben oder einander ähnlich sind (§. 13, 1) so sind ihre gleichnamigen Winkel einander gleich, als Fig. 20. $\triangle$ abc $\sim \triangle$ ade, wo $\hat{c} = \hat{e}$, $\hat{b} = \hat{d}$ (§. 22, a). Denkt man nun 2 gleichnamige Seiten, als ab, ad in n gleiche Theile getheilt und aus den Theilungspunkten mit cb und ed parallele Linien gezogen, so wird auch ac und ae in n gleiche Theile getheilt. Daher (n. I. §. 40) ab . . ad = ac . . ae, und a. gleichem Grunde ab . . ad = bc . . de, mithin

ac . . ae = bc . . de; d. h. in ähnlichen $\triangle\triangle$ sind die gleichnamigen Seiten proportional. Von ihnen muß alles gelten, was von proportionalen Größen überhaupt gilt (I. §. 105 ꝛc). z. B. (ab — ad) . . ad = (ac — ae) . . ae, d. i. bd . . ad = ec . . ae.

94. Daraus ergeben sich die Bedingungen, unter welchen 2 Dreiecke A und B, oder auch mehrere, einander ähnlich sind:

1) wenn 2 Winkel in A, 2 Winkeln in B gleich (vergl. §. 49, 2);
2) wenn ein Winkel in A, einem Winkel in B gleich und 2 Seiten in A, 2 Seiten in B, welche an den gleichen Winkeln liegen, proportional;

Digitized by Google

3) wenn alle 3 Seiten in A, allen 3 Seiten in B proportional.

Anm. Wenn eine von diesen 3 Bedingungen statt findet und eine Seite von A = einer Seite von B, so sind △△ gleich und ähnlich, oder congruent (§. 53).

95. Die Anwendung dieser Sätze giebt bei der Theilung der △△ selbst viele nützliche Resultate. Es sei z. B. Fig. 14. △ abc ungleichseitig, und cm gegen ab, an gegen bc rechtwinklich, so ist △ abn ∾ △ bcm ∾ △ ckn ∾ △ akm (§. 94, 1); daher

ab..bc=bn..bm=an..cm } §. 93; mithin auch
ab..bc=ak..ck =am..cn }

bn..bm=am..cn,

folgl. bn..cn=bm..am.

Ebenso lassen sich auch ab und bc mit ac vergleichen. — Noch besondere Sätze finden sich dadurch bei dem gleichseitigen und gleichschenklichen △.

96. Aber zu vorzüglich wichtigen Wahrheiten gelangt man auf diese Art bei dem rechtwinklichen △. Es sei Fig. 21. $\hat{acb} = \hat{R}$, und $\overline{cd}$ gegen $\overline{ab}$ rechtwinklich, so ist △ acd ∾ △ acb ∾ △ cbd (§. 94, 1); daher

1) ab..ac=ac..ad; folgl. $ad = \frac{ac^2}{ab}$.

2) ab..bc=bc..bd; „ $bd = \frac{bc^2}{ab}$.

3) ad..cd=cd..bd; „ $bd = \frac{cd^2}{ad}$. d. i.

Digitized by Google

ac ist mittl. Proportion. Gr. zwischen ab und ad
bc " " " " " ab " bd
cd " " " " " ad " bd.

97. Da also $ad = \frac{ac^2}{ab}$, $bd = \frac{bc^2}{ab}$ (§. 96, 1. 2), so ist $ad + bd = ab = \frac{ac^2 + bc^2}{ab}$, mithin $ab^2 = ac^2 + bc^2$, d. h. in jedem rechtwinklichen △ ist das Quadrat der Hypotenuse der Summe der Quadrate der Katheten gleich (§. 50, 1).

Anm. Dieser Satz wird nach seinem ersten Entdecker Pythagoras der pythagorische Lehrsatz, wegen seines vielfältigen Nutzens aber magister matheseos genannt. Man hat dafür viele Beweißarten erfunden, unter welchen die in Euklids Elementen (B. 1. S. 47.) eine der sinnreichsten bleibt.

98. Daraus findet sich nun

1) $ab = \sqrt{(ac^2 + bc^2)}$;
2) $ac^2 = ab^2 - bc^2 = (ab + bc).(ab - bc)$;
folglich $ac = \sqrt{(ab^2 - bc^2)} = \sqrt{(ab + bc).(ab - bc)}$;
3) $bc^2 = ab^2 - ac^2 = (ab + ac).(ab - ac)$;
folglich $bc = \sqrt{(ab^2 - ac^2)} = \sqrt{(ab + ac).(ab - ac)}$.

Anm. Es giebt eine unendliche Menge solcher △△, deren Seiten sich durch ganze Zahlen ausdrücken lassen oder rational sind. Sie werden pythagorische △△ genannt. Die Zahlen der Seiten finden sich, wenn man

man 2 ganze Zahlen m und n so annimmt, daß $m > n$, und $ab = (m^2 + n^2)$, $ac = 2.\ m.\ n$, $bc = (m^2 - n^2)$ setzt. Denn durch Rechnung findet man $(m^2 + n^2)^2 = (2.\ m.\ n.)^2 + (m^2 - n^2)^2$. — Im Alterthume hat man nach Proklus (Basel. Ausg. S. 110) dafür 2 Methoden gehabt, wovon die eine, welche mit einer ungeraden Zahl anfängt, dem Pythagoras, die andere, welche von geraden Zahlen ausgeht, dem Platon zugeschrieben wird. Nach jener wird $bc = n$ (unger. Z.), $ac = \frac{n^2 - 1}{2}$, $ab = \frac{n^2 + 1}{2}$, nach dieser $bc = n$ (gerade Z.), $ac = \frac{n^2}{4} - 1$, $ab = \frac{n^2}{4} + 1$ gesetzt.

99. Da ferner Fig. 21. $bd = \frac{bc^2}{ab} = \frac{cd^2}{ad}$, und $ad = \frac{ac^2}{ab} = \frac{cd^2}{bd}$ (§. 97), so verhält sich nach dem ersten $bc^2 .. cd^2 .. = ab .. ad$ (I. §. 106.) nach dem zweiten $ac^2 .. cd^2 .. = ab .. bd$ woraus folgt $bc^2 .. ac^2 = bd .. ad$ (I. §. 118, 2.) d. h. die Abschnitte der Hypotenuse ꝛc. wie die Quadrate der anliegenden Katheten; oder weil auch $bc .. ac = \sqrt{bd} .. \sqrt{ad}$, die Katheten, wie die Quadratwurzeln aus den Abschnitten ꝛc.

Anm. 1. Auch ergiebt sich daraus $ac^2 .. cd^2 = ab .. bd$ oder $ac .. cd = \sqrt{ab} .. \sqrt{bd}$;

Digitized by Google

und $bc^2 \,..\, cd^2 = ab \,..\, ad$ oder $bc \,..\, cd = \sqrt{ab} \,..\, \sqrt{ad}$.

Anm. 2. Besondere Sätze giebt die Anwendung der von §. 97 — 99 vorgetragenen auf die rechtwinklichen △△, in welche sich das gleichseitige, gleichschenkliche ꝛc. △ theilen läßt.

100. Hier können nun auch die §. 76. angedeuteten Fälle in Untersuchung gezogen werden, wenn nämlich △△ so mit Kreisen verbunden sind, daß nur 2 oder nur eine oder gar keine Spitze in der Peripherie des Kreises liegen. Die Seiten solcher △△ sind theils Sehnen und Abschnitte von solchen, theils Tangenten, theils Sekanten, daher die Sätze, die sich für die Bestimmungen der Seiten finden, auch zugleich für die letztern gelten.

101. Wenn 2 Spitzen eines △ in der Peripherie eines Kreises liegen, so muß die 3te entweder innerhalb oder außerhalb des Kreises liegen. Für den ersten Fall sei Fig. 13. von △ abg, ag und bg bis zur Peripherie verlängert, so ist △ aeg ∾ △ bgd (§. 36, 1. §. 94, 1), daher nach §. 93.

1) $ag \,..\, bg = eg \,..\, gd$; mithin stehen die abgeschnittenen Stücke von 2 sich durchschneidenden Sehnen im umgekehrten Verhälnisse zu einander;

2) $ag \,..\, bg = ae \,..\, bd$ = Sehne 2. $\widehat{abg}$ .. Sehne 2. $\widehat{dab}$; und macht man $\widehat{ek} = \widehat{db}$, so

ist △ ake ∾ △ abg (§. 94, 1), daher ag . . ab = ae . . ak ꝛc. Daher gelten von △ abg auch die Sätze §. 58. und §. 61.

102. Wenn dagegen die 3te Spitze **außerhalb** des Kreises liegt, so können 2 Seiten in Beziehung auf den Kreis dreierlei Beschaffenheit haben: als Fig. 22. ac und bc Sekanten, Fig. 23. ae Sekanten, bc Tang. Fig. 24. ac und bc Tang. — Zieht man Fig. 22.

1) ae und db, so ist △ ace ∾ △ bdc (§. 94, 1), folglich ac . . bc = ce . . cd (§. 93); mithin auch △ abc ∾ △ dce (§. 94, 2);

2) macht man $\overset{\frown}{ebf} = \overset{\frown}{deh}$, und zieht $\overline{af}$ und $\overline{ef}$, so ist △ aef ∾ △ abc (§. 94, 1), daher ac . . ab = ae . . af ꝛc. und es gelten ebenfalls die Sätze §. 58. und §. 61. vom △ abc.

103. Wenn Fig. 23. bc eine **Tangente** ist und man zieht

1) $\overline{db}$, so ist △ abc ∾ △ bcd (§. 38. §. 94, 1), daher ac . . bc = bc . . cd, d. h. **bc ist mittl. Proportionall. zwischen ac und dem Abschnitte cd**;

2) be ∥ ae, wodurch $\hat{n} = \hat{a}$ (§. 22. b) = $\hat{q}$ (§. 38.) folglich $m \dot{+} n = m \dot{+} q$ und $\hat{x} = \hat{a}$ (§. 36), so ist △ bde ∾ △ abc, mithin ac . . ab = de . . be ꝛc. und gelten vom △ abc die Sätze §. 58. und §. 61.

Digitized by Google

104. Wenn endlich Fig. 24. $\overline{ac}$ und $\overline{bc}$ Tangenten sind, und man zieht

1) $\overline{cgf}$, so ist cf . . ac = ac . . cg
desgl. cf . . cb = cb . . cg } §. 103, 1
folgl. ac . . cb = cb . . ac, mithin $ac^2 = cb^2$ und ac = cb, d. i. △ acb gleichschenklich, folglich $\hat{cab} = \hat{abc}$ (§. 55, 2);

2) macht man $\overset{\frown}{bd} = \overset{\frown}{ab}$, so ist $\hat{bad} = \hat{adb}$ (§. 36.) und $\hat{abc} = \hat{bda}$ (§. 38), folglich △ abd ∾ △ abc (§. 94, 1.) daher ac . . ab = ab . . ad (§. 93), d. h. ab ist mittl. Proportionall. zwischen ac und ad, und gelten vom △ abc auch die Sätze §. 58. und §. 61.

105. Auf ähnliche Weise lassen sich die △ △ betrachten, wovon nur eine oder keine Spitze in der Peripherie eines Kreises liegt, und finden die Sätze §. 102. — 104. wieder Anwendung dabei. — Besondere Sätze ergeben sich, wenn die △ △ gleichseitig, gleichschenklich oder rechtwinklich sind.

106. Unter jenen ist der Aufmerksamkeit noch der Fall vorzüglich werth, wenn alle 3 Seiten eines △ Tangenten eines Kreises sind, als Fig. 25. △ abd, wo ae = af, be = bg, df = dg (§. 104, 1). Zieht man

1) die Halbmesser ce, ef, cg, desgl. ac, bc, cd, so ist △ ace ≅ △ acf, △ bce ≅ △ bcg, ꝛc. (§. 52, 1); und zieht man die Sehnen

zwischen den Berührungspunkten, als ef, ꝛc., so gelten, weil $\hat{afc} = \hat{aec} = \hat{R}$ (§. 37.) $= \hat{akf} = \hat{ake}$ (§. 59.) die Sätze §. 96 — 99.

2) macht man $\overset{\frown}{gnm} = 2 . \overset{\frown}{ef}$, so ist $\frac{1}{2} \overset{\frown}{gnm} = \hat{aef} + \hat{afe}$ (§. 38.) $= 2 . \hat{aef}$ (§. 104), folgl. $\frac{1}{2} \overset{\frown}{gm} = \hat{a} = \hat{n}$; und macht man $\overset{\frown}{mgn} = 2 . \overset{\frown}{eg}$, so ist a. gl. Gr. $\frac{1}{2} \overset{\frown}{mn} = \hat{b} = \hat{g}$; daher $\triangle$ gmn $\sim$ $\triangle$ abd (§. 94, 1) mithin ab . . ad $=$ gn . . mn ꝛc. und gelten vom $\triangle$ abd auch die Sätze §. 57 und §. 60.

Anm. Auf N. 1. dieses §. beruht die Methode, in einem $\triangle$ einen Kr. zu beschreiben, welcher die Seiten des $\triangle$ berührt; auf 2) in §§. 101 — 106 die Methoden, $\triangle\triangle$ in Kreisen zu beschreiben, welche gegebenen $\triangle\triangle$ ähnlich sind.

b. Vierseitige Ebenen. Vierecke.

107. Vierecke sind einander ähnlich, wenn die $\triangle\triangle$ ähnlich sind, worein sie sich zerlegen lassen (§. 68). Daher folgt aus den Bedingungen der Aehnlichkeit der $\triangle\triangle$, die der Vierecke A und B, wenn in ihnen gegenseitig

1) entweder 1 W. gleich und 4 Seiten proport. (§. 94, 2)
2) oder 2 " " 3 " " "
3) oder 3 " " 2 " " (§. 94, 1)

Anm. Bei Parallelogrammen findet die Aehnlichkeit statt, wenn ein W. gleich und 2 S. proport. (§. 69). Sind die letztern

Digitized by Google

auch gleich, so sind die Parallelogramme congruent.

c. Vielseitige Ebenen. — Vielecke.

108. Aus gleichen Gründen sind n-seitige Ebenen A und B einander ähnlich, wenn die (n — 2) △△, worein sie sich zerlegen lassen (§. 83), in A auf ähnliche Weise liegen, als in B und einander ähnlich sind. Es findet daher die Aehnlichkeit der n-ecke nach §. 94. statt, wenn

1) entweder (n—3) W. gleich und n Seiten proport.
2) oder (n—2) " " " (n—1) " "
3) oder (n—1) " " " (n—2) " "

109. Sind aber n-ecke A und B regulair (§. 84), so sind die n. △△ um den Mittelp. worein sie getheilt werden können (§. 85.) in A denen in B ähnlich, mithin auch die n-ecke einander ähnlich (§. 86. §. 94, 1). Heißen nun von den n-ecken A und B, die Seiten a und b, die Halbmesser R und r, so ist a . . b = R . . r. Der Umfang von A ist = n. a, der von B = n. b, folgl. n. a . . nb = R . . r = D . . d = P . . p (§. 90.) d. h. die Umfänge der regulairen n-ecke verhalten sich wie ihre Halbmesser, Durchmesser oder Umkreise.

d. Kreise.

110. Daher sind nach §. 90. und §. 109. alle Kreise einander ähnlich. Ist nun A ∾ B, so ist, wenn n . a = P, n . b = p (§. 109), P . . p = D . . d = R . . r, d. h. die Um-

Digitized by Google

kreise sind ihren Durchmessern und Halbmessern proportionel.

111. Daraus folgt nun auch, daß

1) ein Bogen des Kreises A von $n^0 = \overset{\frown}{ab}$ Fig. 26. sich zum Bogen eines andern B von $n^0 = \overset{\frown}{ef}$ verhält, wie der Durchmesser, Halbmesser oder Umfang von A zu dem von B. Es sei nach §. 92. $\overset{\frown}{ab} = \frac{n.D.\pi}{360}$, $\overset{\frown}{ef} = \frac{n.d.\pi}{360}$ so ist $\overset{\frown}{ab} \ldots \overset{\frown}{ef} = D \ldots d = R \ldots r = P \ldots p$.

2) macht man $\overset{\frown}{ad} = \overset{\frown}{ef}$, (der Länge nach) so verhält sich $\overset{\frown}{acb} \ldots \overset{\frown}{acd} = \overset{\frown}{ecf} \ldots \overset{\frown}{acd} = \overset{\frown}{ab} \ldots \overset{\frown}{ad} = \overset{\frown}{ab} \ldots \overset{\frown}{ef} = \overline{ac} \ldots \overline{ec}$, d. h. wenn in verschiedenen Kreisen Bogen der Länge nach gleich sind, so verhalten sich ihre Winkel umgekehrt wie die Halbmesser ꝛc.

B. Von den Ebenen in Hinsicht des Inhalts oder Größe.

1) Von dem Inhalte einzelner Ebenen.

112. Wie der Inhalt jeder Größe nur durch Vergleichung mit einer andern gleichartigen, als Maaße, erkannt wird (I. §. 28), so muß auch das Maaß einer Fläche eine Fläche seyn. Dazu erfordert die Natur unseres Erkenntnißvermögens die für dasselbe einfachste, welche wegen des Parallelismus und der Gleichheit der Seiten, wie

Digitized by Google

auch der Winkel des Quadrat ist (§. 71, 1, α). Ist nun die Seite eines Quadrats = a, so ist sein Inhalt = a. a = a^2 (I, 32). Wiewohl aber a willkührlich angenommen werden kann, so pflegt man doch die §. 42. angeführten Größen zu gebrauchen. Es ist daher

nach Decimalmaaße	nach Duodecimalmaaße
1 □° = 10^2 = 100 □′	1 □° = 12^2 = 144 □′
1 □′ = 10^2 = 100 □″	1 □′ = 12^2 = 144 □″
1 □″ = 10^2 = 100 □‴	1 □″ = 12^2 = 144 □‴

Die Verwandelung beider Arten von Quadr. Maaßen geschieht nach diesen Bestimmungen auf ähnliche Weise, als die der Längenmaaße mittelst der Regeldetri (I §. 109, a, 2).

113. Denkt man sich nun eine Seite eines Rechtecks (§. 71, 1, β) als Fig. 17. ef in n gleiche Theile getheilt, so lassen sich an ef n gleiche Quadrate neben einander denken; denkt man sich auch ec in m eben solche Theile getheilt, so muß cdef mn solcher Quadrate enthalten. Nun wird ef die Länge (Grundlinie) und die rechtwinkl. gegen ef liegende ec die Breite (Höhe) des Rechtecks genannt; daher ist der Inhalt desselben = m . n = dem Produkte aus der Länge in die Breite = ef . ec.

Anm. Die Breite (Höhe) ist die kürzeste L., welche von der Länge (Grundl.) ausgezogen werden kann; denn nach §. 57. ist Fig. 17. df < bd < de ꝛc.

114. Die 2 rechtwinkl. congruenten

$\triangle\triangle$ ced und def (§. 69.) sind nun einander auch an Inhalte gleich (§. 14), mithin ist $\triangle$ ecd $=$ $\triangle$ edf $= \frac{1}{2}$ ef.ec, d. h. das rechtwinkl. $\triangle$ ist der Hälfte eines Rechteckes von gleicher Länge und Breite gleich.

115. Daher ist Fig. 17. $\triangle$ ace $=$ $\triangle$ bdf, folglich acbd $=$ cdef $=$ ef.ce $=$ ab.ce, d. h. das schiefwinkl. Parallelogramm ist einem Rechtecke von gleicher Länge und Breite gleich.

116. Daraus und aus §. 114. folgt, daß ein schiefwinkl. $\triangle$ der Hälfte eines Rhomboiden von gleicher Länge und Breite gleich ist, als Fig. 16. $\triangle$ acd $=$ $\triangle$ abd $= \frac{1}{2}$ abcd.

117. Die Hauptergebnisse aus §. 113—116 sind daher

a. der Inhalt eines Parallelogramms ist dem Produkte aus seiner Länge und Breite gleich;

b. der Inhalt eines $\triangle$ ist der Hälfte dieses Produkts gleich.

Anm. Der Inhalt eines gleichseitigen $\triangle$, als Fig. 12. abd ist daher $= \frac{1}{2}$ ab.di. Nun ist aber di $= \sqrt{(ad^2 - ai^2)}$ (§. 98, 2.) $= \sqrt{(ab^2 - \frac{1}{4} ab^2)}$ (§. 48, 1.) $= \sqrt{\frac{3}{4} ab^2} = \frac{1}{2} ab \sqrt{3}$; folgl. $\triangle$ abd $= \frac{1}{4} ab^2 \sqrt{3}$.

118. An diese Sätze reiht sich auch noch folgender. Wenn man in der Diagonale eines Pa-

Digitized by Google

rallelograms, als Fig. 16. in ad durch einen willkührlichen Punkt g, ef || ac, ik || ab zieht, so ist ebgk = igcf.

119. Da ein Trapezion Fig. 17. cdbe = △ ecd + △ ebd (§. 68.) und △ ecd = $\frac{1}{2}$ cd. ec, △ ebd = $\frac{1}{2}$ eb. ec, so ist cdbe = $\frac{1}{2}$ (cd + eb) ec.

120. Aus gleichem Grunde ist ein unregelmäßiges Viereck, als Fig. 27. abcd = $\frac{1}{2}$ ab. cf + $\frac{1}{2}$ ab. de = $\frac{1}{2}$ (cf + de) ab.

Anm. Auf diesen Sätzen beruhen die Regeln der Verwandelung 3- und 4-seitiger Ebenen in einander sowohl im allgemeinen, als auch bei vorgeschriebenen Seiten und Winkeln.

121. Es ist aber in den Sätzen §. 113 — 120 angenommen, daß sowohl die Länge, als auch die Breite der Ebenen unmittelbar gemessen werden können. Dies ist jedoch öfters wegen mancherlei Hindernisse nicht möglich. Dann müssen andere Seiten der Ebenen und Winkel gemessen werden können oder sonst bekannt seyn, um entweder die Länge oder die Breite, oder beide nach §. 61. bestimmen zu können. Z. B.

a) wenn die Länge, als Fig. 14. im △ abc, ab, außerdem ac und $\hat{a}$ bekannt sind, cm aber unbekannt, so ist im △ acm, Sin. 90°. ac = Sin. a . . cm (§. 61), folgl. ist, indem Sin. 90° = 1, cm = ac. Sin. a; daher △ acb = $\frac{1}{2}$ ab. ac Sin. a (§. 117, b);

Digitized by Google

b. wenn die Breite cm, desgl. ac, $\hat{a}$, und $\hat{b}$, folgl. auch $\hat{c}$ (§. 49, 2.) bestimmt sind, so ist Sin. $\hat{b}$ . . ac = Sin. $\hat{c}$ . . ab (§. 61), folgl. $ab = \frac{ac \text{ Sin. } c.}{\text{Sin. } b}$

Daher ist $\triangle abc = \frac{ac^2 \text{ Sin. } a \text{ Sin. } c.}{2. \text{ Sin. } b.}$

c. wenn Länge und Breite unbekannt sind, so leuchtet aus a. und b. schon ein, wie sie gefunden werden können.

122. Der Inhalt eines irregulairen n.ecks (§. 84.) ist der Summe der (n — 2) $\triangle\triangle$ gleich, worein es zerlegt werden kann (§. 83), deren Inhalte nach §. 120. oder §. 121. gefunden werden.

123. Da jedes regulaire n.eck in n congruente $\triangle\triangle$ um den Mittelpunkt getheilt werden kann (§. 85), so hat man blos den Inhalt eines solchen $\triangle$s zu erforschen und mit n zu multipliciren. Es sey Fig. 18. $\triangle$ abc ein solches $\triangle$, welches $= \frac{1}{2}$ ab. cg $= \frac{1}{2}$ bc. ak (§. 117, b); folgl. ist das ganze n.eck $= \frac{1}{2}$ n. ab. cg $= \frac{1}{2}$ n. bc. ak. Es läßt sich aber cg aus ab und $\hat{c}$, desgl. ak aus bc und $\hat{c}$ finden. Z. B. im letztern Falle ist Sin. 90° .. ac = Sin. c . . ak. Nun ist aber ac = bc, (§. 27, a) $\hat{c} = \frac{360°}{n}$ (§. 86.) und

Digitized by Google

Sin. 90° sey = 1, so ist ak = bc Sin. $\frac{360°}{n}$, folgl. △ abc = $\frac{1}{2}$ bc². Sin. $\frac{360°}{n}$, und der Inhalt des ganzen n-ecks = $\frac{1}{2}$ n. bc². Sin. $\frac{360°}{n}$.

124. Da im Kreise nach §. 90. n. ab (Fig. 18) = p = d π = 2. r π (§. 91, 1) gesetzt werden kann, wobei cg = r wird, so ist die Fläche des Kr. = $\frac{1}{2}$ p. r (§. 123.) = $\frac{1}{4}$ d² π = r² π = $\frac{p^2}{4\pi}$ (§. 91, 2) = p². $\frac{1}{4\pi}$ = p². 0,0795774 ... daher der Halbkr. = $\frac{1}{8}$ d² π. = $\frac{1}{2}$ r² π = $\frac{p^2}{8\pi}$.

125. Daraus ergiebt, auch der Inhalt eines Kreisausschnittes von n°, z. B. Fig. 18. abcg = $\frac{n}{360}$ r² π = $\frac{n}{360} \frac{d^2 \pi}{4}$ = $\frac{n}{360} \frac{p^2}{4\pi}$ (§. 92). Und wenn der Bogen n° = x, so läßt sich der Ausschnitt als ein △ ansehen, dessen Inhalt = $\frac{1}{2}$ r x (§. 117, b).

126. Hieraus läßt sich wieder der Inhalt eines Abschnittes von n°, als Fig. 18. abg finden, indem er der Unterschied zwischen dem Kr. Ausschnitte acbg und dem △ abc, mithin = acbg — △ abc ist. Es ist aber der Ausschnitt von n° = $\frac{n}{360}$ r² π (§. 125.) und △ abc = $\frac{1}{2}$ r². Sin. n° (§. 123), indem bc = ac = r,

Digitized by Google

$\hat{c} = n°$; daher der Abschnitt $= \frac{n}{360} \cdot r^2 \pi - \frac{r^2 \text{ Sin. } n°}{2}$.

Anm. Hierher gehört auch die lunula des Hippokrates. Es seyen Fig. 21. agcb, aec, cfb Halbkreise der Durchmesser ab, ac, bc, (wobei c willkührlich angenommen werden kann) so ist die Fläche agcb $= \frac{1}{8} ab^2 \pi$, aec $= \frac{1}{8} ac^2 \pi$, cfb $= \frac{1}{8} bc^2 \pi$ (§. 124). Nun ist aber $ab^2 = ac^2 + bc^2$ (§. 97), folglich auch $\frac{1}{8} ab^2 \pi = \frac{1}{8} (ac^2 + bc^2) \pi$, mithin agcb $=$ aec $+$ cfb. Zieht man die gemeinschaftl. Abschnitte agc und ckb. ab, so bleibt $\triangle$ abc $=$ aecg $+$ ekbf.

127. Endlich findet sich aus §. 124. auch der Inhalt eines Ringes, indem er dem Unterschiede zweier aus ebendemselben Mittelp. beschriebener (concentrischer) Kreise ist. Es sey der Halbmesser des äußern $= R$, der des innern $= r$, so ist die Fläche des Ringes $= R^2 \pi - r^2 \pi = (R^2 - r^2) \pi = (R + r) \cdot (R - r) \pi$.

128. Aus dem Inhalte einer Fläche läßt auch wieder jede Linie berechnen, welche als Faktor darin enthalten ist, wenn die übrigen Faktoren bekannt sind. Wenn überhaupt der Inhalt $= Q$, daher z. B. im Quadrate $Q. = a^2$ (§. 112), so ist $a = \sqrt{Q.}$; wenn im Rechtecke $Q. = m.n$ (§. 113), so ist $m = \frac{Q.}{n}$, $n = \frac{Q.}{m}$; wenn im

Kr. $Q. = r^2 \pi = \frac{1}{4} d^2 \pi = \frac{p^2}{4\pi}$ (§. 124), so ist $r = \sqrt{\frac{Q.}{\pi}}$, $d = \sqrt{\frac{4.Q.}{\pi}} = 2\sqrt{Q.}0{,}3183\ldots$ (§. 91), $p = \sqrt{4\pi . Q.} = 2\sqrt{Q.}\pi$, und dergleichen.

2. Vergleichung der Ebenen in Hinsicht des Inhalts.

129. Zwei oder mehrere Ebenen müssen an Inhalte entweder einander gleich oder ungleich seyn (§. 13, 2. a). Im erstern Falle haben wir die Bedingungen zu untersuchen, unter welchen sie gleich sind, im zweiten aber müssen sie in einem gewissen Größen-Verhältnisse zu einander stehen, welches wir durch Vergleichung ihrer Inhalte erkennen. Die zu vergleichenden Ebenen mögen A und B heißen.

a. Bedingungen der Gleichheit der Ebenen.

130. Im allgemeinen ist $A = B$, wenn das Produkt der Faktoren, welches A giebt, gleich ist dem, welches B giebt. Sind nun

1. A und B Quadrate, und $A = a^2$, $B = b^2$ (§. 112.) so ist $A = B$, wenn $a^2 = b^2$, folgl. wenn $a = b$
2) A und B Rechtecke oder auch schiefwinkl. Parallelogramme (§. 115), und $A = a . b$, $B = m . n$ (§. 117, a), so ist $A = B$, wenn $a.b, = m.n$, oder wenn $a . . m = n . . b$,

Digitized by Google

d. i. wenn die Produkte aus den Längen in die Breite gleich, oder wenn sich die Längen umgekehrt wie die Breiten verhalten;

3) A und B Dreiecke und $A = \frac{a \cdot b}{2}$, $B = \frac{m \cdot n}{2}$ (§. 117, b), so ist $A = B$, wenn $\frac{1}{2} a \cdot b = \frac{1}{2} m \cdot n$, oder $a \cdot b = m \cdot n$ folglich wie N. 2.

131. Wenn daher in einem Parallelogramme $A = a \cdot b$ und $B = m \cdot n$, a und m die Längen, b und n die Breiten und $a = m$, $b = n$, so ist auch $a \cdot b = m \cdot n$, oder $A = B$. Ebendasselbe findet statt wenn A und B Dreiecke von dieser Beschaffenheit sind. Daher gilt der Satz, daß sowohl Parallelogramme als auch $\triangle\triangle$ einander gleich sind, wenn sie gleiche Längen (Grundlinien) und gleiche Breiten (Höhen) haben.

Anm. Darauf beruht die Verwandlung der Parallelogramme sowohl in einander als auch in $\triangle\triangle$ von gleichem Inhalte und umgekehrt. Die Verwandelung derselben in Quadrate aber ergiebt sich nach §. 96. und §. 103.

132. Sind A und B irregulaire n-ecke, so ist $A = B$, wenn die Summe der Inhalte der $(n - 2)$ $\triangle\triangle$ von A der der $(n - 2)$ $\triangle\triangle$ von B (§. 122.) gleich ist.

133. Wenn aber A und B regulaire n-ecke

sind, so leuchtet aus §. 123. ein, daß sie einander gleich sind, wenn die Seiten oder die Halbmesser derselben einander gleich sind.

134. Sind A und B Kreise, und $A = R^2 \pi$, $B = r^2 \pi$ (§. 124), so ist $A = B$, wenn $R^2 \pi = r^2 \pi$, mithin wenn $R = r$, d. i. wenn die Halbmesser gleich.

135. Wenn endlich A und B Ausschnitte verschiedener Kreise von Bogen verschiedener Grade m^0 und n^0, und $A = \frac{m.}{360} R^2 . \pi$, $B = \frac{n..}{360} r^2 \pi$ so ist $A = B$, wenn $\frac{m.}{360} R^2 \pi = \frac{n.}{360} r^2 \pi$, mithin wenn $m.R^2 = n.r^2$ oder wenn $m . . n = r^2 . . R^2$ d. i. wenn sich die Bogen umgekehrt verhalten, wie die Quadrate ihrer Halbmesser.

b. Vergleichung ungleicher Ebenen in Hinsicht ihrer Gehalte.

135. Es leuchtet an sich ein, daß ungleiche Ebenen im allgemeinen sich wie die Produkte der Factoren verhalten, welche die Inhalte derselben geben (§. 112.—127). Nun können nicht nur gewisse Faktoren in A solchen in B gleich seyn, dann verhalten sich die Ebenen, wie die übrigen Faktoren (I. §. 102, 4); sondern es können auch die Faktoren in A denen

in

Digitized by Google

in B proportional seyn, wo sich das Verhältniß der Flächen in den folgenden §§. ergeben wird.

136. Es seyen z. B. A und B Parallelogramme, $A = a.b$, $B = m.n$, so verhält sich

1) im allgemeinen $A \,..\, B = a.b \,..\, m.n$ (§. 135);

2) wenn die Längen gleich, $a = m$, $A \,..\, B = b \,..\, n$ d. i. wie die Breiten; und wenn die Breiten gleich $b = n$, $A \,..\, B = a \,..\, m$, d. i. wie die Längen;

3) wenn Längen und Breiten proportional, folgl. $A \sim B$, $a \,..\, m = b \,..\, n$, folgl. $n = \frac{m.b}{a}$, $A \,..\, B = ab \,..\, \frac{m.m.b}{a} =$ $a^2 \,..\, m^2 = b^2 \,..\, n^2$, d. i. ähnliche Parallelogramme, wie die Quadrate ihrer ähnlich liegenden Seiten.

137. Da sich die Halben, wie die Ganzen verhalten, so gelten von $\triangle\triangle$, als den Hälften von Parallelogrammen gl. Länge und Br. (117, b), ebendieselben Sätze (§. 136) z. B. Fig. 20. $\triangle$ ade $\sim \triangle$ abc (§. 93). Nun seyen $\overline{ef}$ und $\overline{cg}$ senkrecht auf $\overline{ad}$ und $\overline{ab}$, so ist auch $\triangle$ afe $\sim \triangle$ acg, mithin $ad \,..\, ab = ae \,..\, ac = ef \,..\, cg$, folgl. $cg = \frac{ef.ab}{ad}$. Daher $\triangle$ ade $\,..\, \triangle$ abc $=$ $\frac{1}{2}$ ad. ef $\,..\, \frac{1}{2}$ ab. cg $=$ ad. ef $\,..\,$ ab $\frac{ef.ab}{ad} =$ $ad^2 \,..\, ab^2 = ae^2 \,..\, ac^2 = de^2 \,..\, bc^2 =$ $ef^2 \,..\, cg^2$, (wie §. 136, 3).

E

138. Und da sich ähnliche n-ecke in $(n-2)$ ähnliche $\triangle\triangle$ theilen lassen (§. 108.) folgl. alle Seiten in A allen ähnlich liegenden in B proportional sind, so folgt aus §. 137, daß sich auch ähnliche n-ecke wie die Quadrate ihrer ähnlich liegenden Seiten verhalten. z. B. Fig. 27.

$\triangle$ bek . . $\triangle$ abd $=$ bk^2 . . bd^2
$=$ be^2 . . ab^2 (§. 137.)
$\triangle$ beg . . $\triangle$ abc $=$ be^2 . . ab^2
$=$ bk^2 . . bd^2, folglich

$\triangle$ bek $+\triangle$ beg . . $\triangle$ abd $+\triangle$ abc $= 2$ bk^2 . . 2 bd^2

d. i. bkeg . . abcd $=$ bk^2 . . bd^2 $=$ bg^2 . . bc^2 ꝛc.

139. Wenn dagegen A und B regulaire n-ecke sind, deren Seiten $=$ a und b, und deren Halbmesser $=$ R und r, so ist $A = \frac{1}{2}$ n. R^2. Sin. $\frac{360^0}{n}$, und $B = \frac{1}{2}$ n. r^2. Sin. $\frac{360^0}{n}$ (§. 123), daher A . . B $=$ R^2 . . r^2 $=$ a^2 . . b^2. (§. 93.) d. i. regulaire n-ecke verhalten sich wie die Quadrate ihrer Halbmesser oder ihrer Seiten.

140. Und wenn A und B Kreisflächen sind, und $A = R^2\pi = \frac{1}{4} D^2\pi = \frac{p^2}{4\pi}$, $B = r^2\pi$ $= \frac{1}{4} d^2\pi = \frac{p^2}{4\pi}$ (§. 124), so verhält sich A . . B $=$ R^2 . . r^2 $=$ D^2 . . d^2 $=$ P^2 . . p^2 d. h. Kreisflächen, wie die Quadrate ihrer Halb- oder Durchmesser oder Peripherien.

Digitized by Google

141. Wenn endlich A und B Ausschnitte

1) von verschiedenen Bogen m^0 und n^0 ebenderselben Kreisfläche sind, so ist $A .. B = m^0 .. n^0$ (§. 125).

2) von gleichen Bogen in Graden $= n^0$ verschiedener Kreisflächen, deren Halbmesser $= R$ und r ꝛc., so ist $A .. B = R^2 .. r^2 = D^2 .. d^2 = P^2 .. p^2$ (§. 125.) mithin wie die Kreise selbst (§. 140).

142. Besondere Betrachtung verdient hier das rechtwinkl. $\triangle$, in so fern es sich in 2 dem Ganzen ähnliche $\triangle\triangle$ theilen läßt (§. 96). Es verhält sich daher Fig. 21.

$\triangle acd .. \triangle bcd = ac^2 .. bc^2$ (§. 137) mithin auch

$(\triangle acd + \triangle bcd) .. \triangle bcd = (ac^2 + bc^2) .. bc^2$ (I. §. 112)

desgl. $\triangle acb .. \triangle bcd = ab^2 .. bc^2$, folgl.

$(\triangle acd + \triangle bcd) .. \triangle acb = (ac^2 + bc^2) .. ab^2$.

Nun ist aber $\triangle acd + \triangle bcd = \triangle acb$, folgl. ist auch $ac^2 + bc^2 = ab^2$. Vergl. §. 97. Auf ähnliche Weise findet sich auch $ac^2 = ab^2 - bc^2$ und $bc^2 = ab^2 - ac^2$ (§. 98.)

143. Beschreibt man an ab Fig. 21. ein willkührliches n-eck $= A$, und an ac ein anderes ähnliches $= B$, desgleichen auch an bc ein ähnliches C, so daß ab, ac, bc ähnlich liegende Seiten von A, B, C sind, wo sich A, B, C $= ab^2, ac^2, bc^2$ (§. 138.) verhalten, so ergiebt sich auch, daß $A = B + C$. Auf diese Weise läßt

Digitized by Google

an allen unter dieser Bedingung beschriebenen n-ecken der pythagorische Lehrsatz beweisen (§. 97).

144. Auf den Sätzen §. 137. ꝛc. beruht auch die Reduction der Ebenen auf andere ihnen ähnliche. Soll z. B. Fig. 27. acbd auf eine andere ähnliche reducirt werden, welche $\frac{n}{m}$ des Inhalts derselben ist, (wo n und m jede ganze Zahl seyn kann), so zieht man um eine Seite, als bd einen Halbkreis bod, theilt bd in m gleiche Theile, nimmt n solcher Theile = bi, und zieht io rechtwinkl. auf bd, dann auch bo und macht bk = bo. Zieht man nun ke ‖ ad, eg ‖ ac, so ist bkeg $= \frac{n}{m}$. acbd. Denn bd . . bo = bo . . bi (§. 96, 1.) oder nach vorigem bd . . bk = bk . . $\frac{n}{m}$ bd, folgl. $bk^2 = \frac{n}{m} . bd^2$. Nun verhält sich bkeg . . acbd = bk^2 . . bd^2 folgl. auch = $\frac{n}{m} . bd^2$ . . $bd^2 = \frac{n}{m}$ . . 1, oder bkeg = $\frac{n}{m}$ acbd.

Anm. Bei solcher Reduction kann aber auch anstatt des Satzes §. 96. der Satz §. 103, 1. angewendet werden. Denn es sey Fig. 23. ac eine Seite des zu reducirenden n-ecks, und dc = $\frac{n}{m}$. ac, so ziehe man einen willkührl. Kreis durch a und d, und daran die Tang. bc, so ist bc die ähnlich liegende Seite des n-eck von $\frac{n}{m}$ des Inhalts der ersteren.

Dritter Abschnitt.

Von den Körperräumen (Stereometrie).

145. Da die Körperräume ebenfalls sowohl in Hinsicht der Gestalt, als auch in Hinsicht des Inhalts zu betrachten sind (§. 5), so zerfällt dieser Abschnitt auch in 2 Abtheilungen. Aus obigem Grunde aber (§. 7.) beschränken wir uns hier auf diejenigen Körper, welche und insofern sie von Ebenen begrenzt sind, oder gedacht werden.

A. Von den Körperräumen in Hinsicht ihrer Gestalten.

146. Die Gestalten der Körper hängen sowohl von den Gestalten und Größen ihrer Grenzflächen, als auch von der gegenseitigen Lage derselben ab. Von jenen haben wir im 2ten Abschnitte gehandelt, und die Gesetze der Lagen der Flächen lassen sich leicht aus denen der Linien (§. 16. ꝛc.) ableiten. — Ebenen aber, welche und in so fern sie einen Körper begrenzen, müssen mit ihren Grenzlinien zusammenstoßen, welche in so fern Kanten genannt werden; und wenn mehrere Winkelebenen, indem sie einen Körperraum einschließen, mit ihren Spitzen zusammen-

Digitized by Google

treffen, als Fig. 28. $\hat{aeb}$, $\hat{bed}$ ꝛc. in e, so bilden sie einen körperlichen Winkel oder eine Ecke.

147. Wie ein W. von 2 Linien gebildet wird (§. 18), ebenso erfordert eine Kante 2 Flächen, deren zusammentreffenden Grenzlinien einander gleich seyn müssen. Sind letztere gerade, was nur bei Ebenen statt findet, so ist auch ebendarum die Kante gerade; sind aber jene krumm, so ist auch diese krumm, kann aber als aus kleinen geraden Kanten bestehend gedacht werden (Vergl. §. 90).

148. Eine Ecke kann von 3, 4, 5 . . . n Winkelebenen (wenn n jede ganze Zahl bedeutet) begrenzt seyn. Die Summe aller Winkel aber beträgt jedesmal weniger als 4 $\hat{R}$. Es sey z. B. Fig. 28. die Ecke e von 5 Winkelebenen $\hat{aeb}$, $\hat{bed}$ ꝛc. eingeschlossen. Ein ebener Durchschnitt derselben abdgf giebt ein 5-eck, in welchem sich ein Punkt c willkührlich annehmen läßt, um welchen die 5 W. $\hat{acb} + \hat{bcd} + \hat{dcg} +$ ꝛc. $=$ 4 R (§. 20, b), wobei $\hat{bac} + \hat{abc} < 2\ \hat{R}$ (§. 49, 1). Denkt man sich e in c, wo die Summe der Winkelebenen $= 4\ \hat{R}$, so liegen sie alle in einer Ebene und können daher keine Ecke bilden. Soll aber dieses geschehen, so muß e über der Ebene abdgf liegen. Denkt man sich nun e von c nach $\overline{ce}$ immer weiter entfernt, so kön-

Digitized by Google

ken und Winkelebenen so lange eine Ecke bilden, bis je 2 Schenkel derselben, als ae und bc ꝛc. gegeneinander parallel sind, (z. E. wenn ae und be in die Lage ak und bi kommen, so daß $\hat{kab} + \hat{abi} = 2\,\hat{R}$ (§. 22, c), wo keine Ecke mehr statt finden kann. Daraus leuchtet ein, daß, wenn sich e über c entfernt, $\hat{eab} + \hat{eba} > \hat{cab} + \hat{abc}$, folgl. $\hat{aeb} < \hat{acb}$ wird. Dasselbe findet nun bei allen übrigen Winkelebenen statt, daher $(\hat{aeb} + \hat{bed} + \hat{deg} + \hat{gef} + \hat{aef}) < (\hat{acb} + \hat{bcd} + \hat{dcg} + \hat{gcf} + \hat{acf})$, mithin auch $< 4\,\hat{R}$.

140. Alle Arten von Flächen können nun unter dieser Bedingung Körperräume begrenzen, und ihre Gestalten daher sehr mannigfaltig seyn. Für die Elemente der Stereometrie sind aber diejenigen auszuwählen, welche für die menschliche Erkenntniß die einfachsten sind und für welche sich allgemeine Regeln finden lassen. Man kann sie in 3 Klassen theilen:

a. solche, welche congruente 3, 4, 5 ... n-ecke zu Grund- und Oberflächen, mithin Parallelogramme zu Seitenflächen haben, und Prismata heißen;

b. solche, welche n-ecke zu Grundfl. und 3-ecke zu Seitenflächen haben, mithin spitzig zulaufen. Sie werden Piramyden genannt;

c. solche, welche von lauter regulairen und glei-

Digitized by Google

chen Vielecken gleicher Art eingeschlossen und so gestaltet sind, daß die Spitzen ihrer Ecken, von dem Mittelp. des Körpers gleich weit entfernt sind, mithin in der Oberfläche einer um sie gedachter Kugel liegen. Diese pflegt man vorzugsweise regulaire Körper zu nennen.

1. Betrachtung einzelner Körperräume.

a. Prismata.

150. Wenn ein Prisma congruente 3, 4, 5 . . . n-ecke zu Grund- und Ober-Fl. hat, so wird es ein 3, 4, 5 . . . n-seitiges Prisma genannt. Das n-seitige hat nach §. 149, 1. 2 congruente n-ecke zu Grund- und Oberfl. und n Parallelogramme zu Seitenflächen, deren Inhalte nach §. 112. ꝛc. gefunden werden können. Auch läßt es sich in n — 2 3seitige von gleicher Höhe theilen z. B. Fig. 31,

151. Unter den 4seitigen Prismen wird dasjenige, dessen Grund- und Oberflächen, und daher auch die entgegenliegenden Seitenflächen parallel liegende congruente Parallelogramme sind, ein Parallelepipedon genannt, (als Fig. 30). Der Inhalt seiner 6 Flächen findet sich nach §. 113. ꝛc. Und sind alle 6 Flächen Quadrate, Fig. 29., so heißt das Parallelp. ein Kubus oder Würfel, s. §. 160.

152. Wenn die Grund- und Oberfläche glei-

Digitized by Google

che Kreise sind (§. 90. §. 134.), so wird das Prisma eine Walze oder Cylinder genannt, als Fig. 32. Die Seitenflächen machen eine krumme Fläche aus, welche einem Rechtecke gleich ist, dessen Länge = dem Umfange = $p = d\pi = 2r\pi$ (§. 91, 1), und die Breite = der Höhe des Cyl. = ac = h, folglich die Seitenfläche desselben = $p \cdot h = d\pi h = 2r\pi h$ (§. 113). Nun sind Grund- und Oberfl. = $2r^2\pi = \frac{1}{2}d^2\pi = \frac{p^2}{2\pi}$ (§. 124); folgl. der Inhalt sämmtlicher Flächen des Cyl. $= 2r^2\pi + 2r\pi h = 2r\pi(r + h) = \frac{1}{2}d^2\pi + d\pi h = d\pi(\frac{1}{2}d + h) = (\frac{p^2}{2\pi} + ph) = p(\frac{\frac{1}{2}p}{\pi} + h)$. — Daher verhält sich die G. u. O. Fl. zusammen zu der Seitenfl. $= 2r^2\pi \ldots 2r\pi h = r \ldots h$.

Anm. Setzt man den Inhalt der Seitenfl. $d\pi h = x^2\pi$, wo mithin $d \cdot h = x^2$, so ist $d \ldots x = x \ldots h$, d. i. die Seitenfläche ist einer Kreisfl. gleich, deren Halbmesser (§. 124.) die mittlere Proportionallinie zwischen dem Durchmesser und der Höhe des Cyl. ist; und x findet sich aus d und h nach §. 96. und §. 103.

b. Piramyden.

153. Die Piramyden werden ebenfalls 3, 4, 5 .... n-seitige genannt, wenn sie 3, 4, 5... n-eck zu Grundflächen haben. Da die Seitenfl. △△ sind, Fig. 33. (§. 149, b), deren Inhalt

Digitized by Google

nach §. 116. gefunden wird, so ist der ganze Flächeninhalt einer P. nur halb so groß als der eines Prismas von gleicher Grundfl. und der Höhe einer Seitenfl. der Pir. Auch läßt sich jede n-seitige P. in (n — 2) 3seitige theilen (§. 83).

154. Ist die Grundfl. eine Kreisfl., so heißt der spitzig zulaufende Krpr ein Kegel Fig. 34. Wie nun der Kr. als ein n-eck von sehr vielen Seiten betrachtet werden kann (§. 90.), ebenso läßt sich die krumme Seitenfläche des K. als n sehr schmale △△ ansehen, welche einem △ gleich, dessen Grundlinie = dem Umfange der Grundfl. = p und dessen Höhe = ae, mithin die Seitenfl. = $\frac{1}{2}$ p. ae (§. 116.) = $\frac{1}{2}$ dπ. ae = r.π. ae (§. 91, 1.) = rπ $\sqrt{}$ ($r^2 + ce^2$), (§. 97). Daher der gesammte Inhalt der Flächen = $r^2\pi$ + rπ. ae = rπ (r + ae) = $\frac{1}{2}$ p $\left(\frac{p}{2\pi} + ae\right)$; und es verhält sich die Seitenfl. zur Grundfl. = rπ. ae . . $r^2\pi$ = ae . . r.

Anm. Setzt man die Seitenfl. rπ. ae = $x^2\pi$, mithin r. ae = x^2, so ist r . . x = x . . ae. Vergl. §. 152, Anm.

155. Zu dieser Klasse von Körpern gehören auch diejenigen, deren Oberflächen den Grundflächen ungleich, aber ähnlich sind. Denkt man sich nämlich eine Piramyde parallel mit der Grundfl. durchschnitten, als Fig. 33. △ abd || △ squ, so ist wegen Gleichheit der W. △ abd ~ △ squ (§. 94, 1). Es wird daher solch ein

Digitized by Google

Körper, als aq, eine abgekürzte Piramide genannt. Nun sey △ abd = G, △ suq = g, so ist G . . g = ab^2 . . su^2 (§. 137), folgl. $g = G\frac{su^2}{ab^2}$, daher $G + g = G\left(1 + \frac{su^2}{ab^2}\right)$. Die Inhalte der Seitenflächen finden sich nach §. 119. z. B. absu = $\frac{1}{2}$ (ab + su) sw, und auf gleiche Weise die übrigen.

156. Denkt man sich einen Kegel mit der Grundfl. = G parallel durchschnitten, so heißt das untere Stück ein abgekürzter Kegel, als abfi Fig. 34., und es ist ebenfalls G . . g, wenn g die Oberfläche ist. Sind G und g Kreisfl., so ist $G = R^2\pi = \frac{1}{4}D^2\pi = \frac{p^2}{4\pi}$ und $g = r^2\pi = \frac{1}{4}d^2\pi = \frac{p^2}{4\pi}$ (§. 124.) Die Seitenfl. aber ist nach §. 154. einem Trapezion gleich, dessen Inhalt = $\frac{1}{2}$ (P + p) m, wenn ai = m, (§. 119.) = $\frac{1}{2}$ m (D + d) π = m (R + r) π. Die Seitenfl. verhält sich daher zur Grund- und Oberfl. = m (R + r) . . ($R^2 + r^2$).

Anm. Wenn man endlich auch m (R + r) $\pi = x^2\pi$ setzt, mithin m (R + r) = x^2, so ist (R + r) . . x = x . . m. Vergl. §. 152. Anm.

c. Regulaire Körper.

157. Da zur Begrenzung eines Körpers wenigstens 4 Ebenen (§. 10, c) erfordert werden, das △ aber in Hinsicht der Seitenzahl die ein-

Digitized by Google

fachste ist, so ist der in ebenderselben Hinsicht einfachste regulaire Krpr. derjenige, welcher von 4 gleichen gleichseitigen △△ begrenzt ist (§. 149, c) und daher Tetraëdron genannt wird. Die 3 Winkelebenen jeder Ecke sind = 3. 60° (§. 55, 1) = 180°, mithin ein solcher Krpr. möglich (§. 148). Ist jede Kante = ab, so ist jedes der ihn einschließenden △△ = $\frac{1}{4}$ ab² $\sqrt{3}$ (§. 117, Anm.), folgl. die Flächen des ganzen Körpers zusammen = ab² $\sqrt{3}$.

158. Wenn jede Ecke von den Winkelebenen 4 gleicher gleichseitiger △△ begrenzt wird, deren Summe = 4. 60. (§. 55, 1.) = 240°, so ist ein regulairer Körper möglich (§. 148), welcher von 8 solchen △△ eingeschlossen wird und Oktaëdron heißt. Ist 1 Kante desselben = ab, so ist die Summe aller 8 Flächen = 2 ab² $\sqrt{3}$ (§. 117, Anm.)

159. Ist jede Ecke von den Winkelebb. 5 gleicher gleichseitiger △△ begrenzt, deren Summe = 5. 60° = 300°, so ist

1) ein Körper möglich, welcher von 10 solchen △△ eingeschlossen wird, deren Inhalt nach vorigem = 10. $\frac{1}{4}$ ab² $\sqrt{3}$ = 2 $\frac{1}{2}$ ab² $\sqrt{3}$, dessen Ecken aber nicht alle in der Oberfl. einer Kugel liegen können. Vergl. §. 149, c;
2) aber auch ein anderer Körper möglich, welcher von 20 solchen △△ begrenzt wird und daher Ikosaedron heißt, durch dessen sämmtliche Ecken eine Kugelfl. gedacht werden kann.

Digitized by Google

Der Inhalt aber 20 △△ ist nach vorigen = 5 $ab^2 \sqrt{3}$.

Anm. Ein Körper, an welchen jede Ecke von W. Eb. 6 gl. gleichs. △△ begrenzt seyn sollte, ist nach §. 148, weil 6. 60° = 360°, unmöglich.

160. Wenn ferner jede Ecke von den W. Eb. von 3 Quadraten begrenzt wird, deren Summe = 3. 90° (§. 71, 1, α) = 270° ist, so ist der Körper von 6 Quadraten eingeschlossen und heißt daher Hexaedron, Kubus oder Würfel (§. 151.) Fig. 29. Der Inhalt aller 6 Flächen ist daher, = 6 ab^2 (§. 112).

Anm. Weil 4. 90° = 360°, so können die Winkel von 4 Quadraten keine Ecke einschließen (§. 148).

161. Und wenn jede Ecke von den W. Eb. von 3 regulairen 5-ecken begrenzt wird, deren Summe = 3. 108° (§. 78.) = 324°, so ist ein von 12 regul. 5-ecken eingeschlossener Körper möglich, welcher Dodekaëdron genannt wird. Der Inhalt der Fläche eines 5-ecks findet sich durch algebraische Rechnung = $\frac{1}{4}$ $ab^2 \sqrt{(1+\frac{2}{5}\sqrt{5})}$; folgl. die Summe aller Flächen des Dodekaëdrons 15 $ab^2 \sqrt{(1+\frac{2}{5}\sqrt{5})}$.

Anm. Da 4 W. Eb. des reg. 5-ecks = 4. 108° = 432°, ferner 3 W. Eb. des reg. 6-ecks = 3. 120° = 360°, u. s. w., so kann weder von mehr als 12 reg. 5-ecken, noch von reg. 6-ecken, und noch weniger

Digitized by Google

von mehr, als 6seitigen reg. Vielecken ein Krpr. eingeschlossen werden (§. 148).

162. Wie aber in der Reihe der prismatischen Krpr. der Cylinder (§. 152), in der Reihe der Piramyden der Kegel (§. 154.) das letzte Glied ist, so ist es in der Reihe der regulairen Krpr. die Kugel Fig. 35., worunter man den Krpr. versteht, der von einer runden Oberfl. begrenzt wird, welche in allen Punkten von einem innerhalb desselben liegenden Punkte gleich weit entfernt ist, welcher daher der Mittelp. heißt. Wie nämlich der Kr. als ein Vieleck (§. 90), ebenso wird die Kugelfl. als aus einer sehr großen Menge gleicher gleichseitiger △△ bestehend betrachtet. Daher wird die Kugel in sofern zu den regulairen Krprn. gerechnet.

163. Eine durch den Mittelp. der K. auf beiden Seiten bis zur Oberfl. derselben gedachte ger. L., als Fig. 35, ab, ps heißt ein Durchmesser der K. und die Grenzpunkte desselben a und b, p und s, die Pole. Ein um die Kugel durch die Pole gedachter Kr. als Fig. 36. dbgkd, wird ein größter Kr. genannt (§. 65. Anm. 1). Da alle Halbmesser einander gleich sind (§. 162), als Fig. 35. ac = ce = cp ꝛc. mithin auch alle Durchmesser (§. 29.), so sind auch alle größte Kreise einander gleich (§. 134), und es sey der Halbm. der K. = r, so ist die Fläche jedes größten Kr. = $r^2 \pi$ (§. 124).

164. Ein mit der Ebene eines größten Kr.

Digitized by Google

paralleler Durchschnitt, als Fig. 35. cwi ab, ist ebenfalls eine Kreisfl. Denn da $\triangle$ cwi $\cong$ $\triangle$ cvi $\cong$ $\triangle$ cui ꝛc. (§. 52, 2), so ist iw = iv = iu ꝛc., mithin Halbmesser eines Kr. wvu, welcher ein Parallelkreis genannt wird.

1) die Periph. desselben ist $= 2 \cdot iw \cdot \pi$ (§. 91, 1.) und verhält sich zum größten Kr. $=$ iw . . ac (§. 110.) $=$ iw . . r (§. 163.);

2) die Fläche desselben $= iw^2 \pi$ (§. 124.) $=$ ip. is. π (§. 96, 3.) $= (2\,r - is)$ is. $\pi = (2\,r. is - is^2)\pi$.

Anm. 1., Aus $iw^2 \pi = (2\,r. is - is^2)\pi$ findet sich $r = \frac{iw^2 + is^2}{2. is}$.

2) wenn is $=$ ic $= \frac{1}{2}$ r, so ist co $=$ os $=$ cs (§. 53, 2.) folgl. $\overset{\frown}{sco} = \overset{\frown}{so} = 60°$ (§. 55, 1.) und $\overset{\frown}{bo} = 30°$. Daher die Fläche eines von einem größten Kr. um 30° entfernten Parallelkr. $= (2\,r. \frac{1}{2}\,r - \frac{1}{4}\,r^2)\pi = \frac{3}{4}\,r^2\pi$, oder sie beträgt $\frac{3}{4}$ von der Fl. des größten Kr. (§. 163).

165. Ferner heißt eine zwischen 2 Parallelkr. liegende Fläche um die Kugel, als Fig. 35. efmn, eine Zone. Denkt man sich em und fn so nahe an einander, daß $\overset{\frown}{ef} =$ Tang. $\overline{ef}$ ohne merklichen Fehler gesetzt werden kann, so läßt sich die Zone als die Seitenfläche eines abgekürzten Kegels betrachten, deren Inhalt $=$ ef$(gf + eq)\pi$ (§. 156). Aber wegen jener Annahme kann auch gf $=$ eq gesetzt werden, daher die Zone $=$ ef. 2. eq. π.

Digitized by Google

Zieht man nun aus dem Berührungsp. e, ec = r (§. 163.) und ek rechtwinkl. auf fg, so ist △ fek ∾ △ ceq (§. 94, 1), mithin ef . . ek = ec . . eq (§. 93.) und $eq = \frac{ec.ek}{ef} = \frac{r.ek}{ef}$.

Daher ist die Zone $= \frac{ef.2.r.ek.\pi}{ef} = 2r.\pi.ek$,

(indem ek = der Dicke mehrerer dergleichen dünner Scheiben seyn kann) d. h. (weil 2 r. π = dem größten Kr.) = einem Rechtecke, dessen Länge ein größter Kr. und die Breite die Dicke der Scheibe der Z. ist (§. 113).

Anm. 1. Ist ck = ½ r, (§. 164, Anm. 2.) so ist die Zone 30° = $r^2\pi$, d. i. der Fl. des größten Kr. gleich (§. 163).

2) Es sey 2 r. π. ek = dπ. ek (§. 91, 2.) = $x^2\pi$, so ist d . . x = x . . ek. Vergl. §. 152. Anm.

166. Der Durchschnitt einer K. (§. 164.) giebt einen Kugelabschnitt, als Fig. 35. epm, osw. Die Fläche desselben, auch Kugelmütze genannt, welche als einer Menge schmaler Zonen bestehend gedacht werden kann, findet sich ebenfalls nach §. 165. z. B. epm = 2 r. π. $\overline{pq}$; osw = 2 rπ. is, und asb = 2. rπ. cs = $2r^2\pi$.

Anm. Wenn is = ½r, so ist $\overset{\frown}{os} = 60°$, folgl. $\overset{\frown}{osw} = 120°$ (§. 164. Anm. 2). Daher ist die Kugelmütze von 120° = $r^2\pi$, d. i. der Fl. eines größten Kr. gleich.

§. 167.

Digitized by Google

167. Daraus folgt nun, daß die Oberfl. der ganzen Kugel $= 2r. \pi. ps = 2r. \pi. 2r = 4r^2\pi$, d. i. 4 mal so groß als die Fläche eines größten Kr.; oder $= d^2\pi$, wenn $ps = d$, oder $= \frac{p^2}{\pi}$, wenn $p =$ dem Umfange desselben, $= p^2 . \frac{1}{\pi} = p^2 . 0{,}3183 \ldots$ (§. 91, 2).

168. Wenn 2 größte Kreise der K. einander durchschneiden, als Fig. 36. abqka und dbgkd, so entstehen 4 W., welche sphärische W. genannt werden. Sind die Nebenw. einander gleich, so heißen sie rechte, als $\widehat{abd} = \widehat{dbq} = \widehat{R} = 90°$ (§. 19, a), wo nicht, spitz, als $\widehat{n}$, oder stumpf, als $\widehat{m}$ (§. 19, b. c). Jeder derselben ist ebenso groß, als der Winkel, unter welchem sich die Ebenen seiner Kreise schneiden, als $\widehat{n} = \widehat{acb}$. Nun wird aber $\widehat{acb}$ von $\overset{\frown}{ab}$ gemessen (§. 32.), folgl. auch $\widehat{n} = \overset{\frown}{ab}$, d. i. ein sphär. W. wird von dem Bogen eines gr. Kr. gemessen, auf welchem seine Schenkel rechtwinkl. stehen.

169. Wenn 3 größte Kr. einander in 3 Punkten durchschneiden, so wird der zwischen den 3 abgeschnittenen Bogen liegende Raum ein sphärisches oder Kugel-Dreieck genannt, als Fig. 36. △ bed, △ dbq, ꝛc. Weil $\widehat{ecb} = \widehat{kcf}$ (§. 20, b), so ist $\overset{\frown}{be} = \overset{\frown}{kf}$ (§. 32), und aus glei-

chem Grunde $\overset{\frown}{bd} = \overset{\frown}{gk}$, $\overset{\frown}{ed} = \overset{\frown}{gf}$, folgl. $\triangle$ ebd $\cong$ $\triangle$ gkf, und ebenso $\triangle$ egb $\cong$ $\triangle$ dkf, ꝛc. d. i. sphärische $\triangle\triangle$, welche einander gegenüber liegen und von ebendenselben größten Kr. eingeschlossen werden, sind congruent.

170. Die Flächen zwischen 2 gr. Kr. ist aber desto größer, je größer der W. ist, unter welchem sie sich durchschneiden, z. B. Fig. 36. degbd desto größer, je größer $\overset{\frown}{n}$. Weil nun $\triangle$ ebd + $\triangle$ ebg + $\triangle$ dbf + $\triangle$ bgf = $2r^2\pi$ (§. 166.) und $\triangle$ ebd + $\triangle$ ebg = $\frac{n}{180}.2\ r^2\pi = \frac{n.r^2\pi}{90}$, desgl. $\triangle$ ebd + $\triangle$ bdf = $\frac{m.r^2.\pi}{90}$, folgl. $\triangle$ bdf = $\frac{m.r^2.\pi}{90}$ — $\triangle$ ebd, desgl. $\triangle$ ebd + $\triangle$ dek = $\frac{s\ .\ r^2\pi}{90}$, folgl. $\triangle$ dek = $\triangle$ bgf (§. 169.) = $\frac{s.r^2\pi}{90}$ — $\triangle$ ebd, so ist die Fl. der Halbkugel edqg = $2r^2\pi = \frac{(n+m+s)r^2\pi}{90} - 2\triangle\triangle$ ebd, und $2\triangle\triangle$ ebd = $\frac{(n+m+s)r^2\pi}{90} - 2r^2\pi$, folgl. die Fläche des sphär. $\triangle$ ebd = $\frac{(n+m+s)r^2\pi}{180} - r^2\pi$ = $\frac{[(n+m+s)-180°]}{180} r^2\pi$.

Anm. 1. Ist s = 90° (§. 168.), so ist $\triangle$ ebd

$= \frac{(n+m-90)}{180} r^2\pi$; ist $m = s = 90°$, so ist $\triangle$ ebd $= \frac{n \cdot r^2\pi}{180}$, und ist $n = m = s = 90°$, so ist $\triangle$ ebd $= \frac{90\, r^2\pi}{180} = \frac{1}{2} r^2\pi = \frac{4 r^2\pi}{8}$, oder $\frac{1}{8}$ der ganzen Kugelfl. (§. 167).

Anm. 2. Die Untersuchung, wie sich die Seiten und W. sphärischer $\triangle\triangle$ durch einander bestimmen lassen, macht einen besondern Zweig dieses Abschnitts aus, welcher sphärische Trigonometrie genannt wird. Vergl. §. 63.

171. Die Flächen aller der von §. 150 ꝛc. betrachteten Körper lassen sich zusammenhängend auf eine Ebene zeichnen, und man nennt die Zeichnungen davon die Netze derselben. Die Regeln der Verzeichnung der Netze der von §. 150—161 betrachteten Körperfl. lassen sich aus den gefundenen Bestimmungen schon ableiten; die Kugelfläche aber läßt sich in eine Anzahl nach beiden Polen spitzig zulaufender Streifen getheilt denken, als Fig. 36. dagbd, deren Breiten in der Mitte zusammen einem größten Kr. der K. gleich sind, und nach den Polen zu nach dem Verhältnisse der Linien Fig. 35, ac, gf, eq ꝛc. abnehmen (§. 164, 1).

2. Betrachtung der Flächen der Körper in gegenseitiger Beziehung.

172. Es ist an sich klar, daß sich im allg.

Digitized by Google

meinen die Flächen, welche 2 Körper begrenzen, wie die Summen der Produkte aus ihren Längen und Breiten verhalten (§. 135 ꝛc.), und einander gleich sind, wenn jene Summen gleich sind.

173. Die ähnlich liegenden Seitenflächen ungleicher Körper können aber einander ähnlich seyn (§. 108). In diesem Falle werden auch die Körper ähnliche K. genannt, als Fig. 30. abkf ∽ aotu, und ihre ähnlich liegenden Kanten sind einander proportional (§. 93.)

174. Sind nun 2 n-seitige Prismata A und B einander ähnlich, so verhalten sich sowohl ihre Grundfl., als auch ihre Seitenflächen, mithin auch alle zusammen wie die Quadrate ihrer ähnlich liegenden Kanten. Es sey z. B. Fig. 30. die ganze Fläche des Prllelpdons abkf = A, die des ihm ähnlichen aotu = B, so verhält sich

abcd..aopq = $ab^2..ao^2$, desgl.
abeg..aovs = $ab^2..ao^2$, } §. 136, 3.
acef..aqts = $ac^2..aq^2 = ab^2..ao^2$ }

folgl. auch A..B = $ab^2..ao^2 = ac^2..aq^2 = ae^2..as^2$.

175. Zwei Cylinder A und B sind einander ähnlich, wenn sich die Durchmesser ihrer Grundfl. wie ihre Höhen (§. 152.) verhalten, also wenn letztere H und h, D..d = H..h. Daher die Grundfl. von A zu der von B = $D^2..d^2 = H^2..h^2$ (§. 140.), und die Seitenfl. v. A

Digitized by Google

zu der von $B = D \pi . h \ldots d \pi h$ (§. 152.) $= D H \ldots d . h = D^2 \ldots d^2 = H^2 \ldots h^2$; folgl. die Fl. A zur Fl. $B = D^2 + D^2 \ldots d^2 + d^2 = 2 D^2 \ldots 2 d^2 = D^2 \ldots d^2 = H^2 \ldots h^2$.

176. Aus §. 153 und 154 ergiebt sich, daß sich die Flächen ähnlicher Piramyden und ähnlicher Kegel ebenfalls verhalten, wie die Quadrate ihrer ähnlich liegenden Kanten, oder Durchmesser ꝛc. (§. 175).

177. Da sich alle regulaire n-ecke, wie die Quadrate ihrer ähnlich liegenden Seiten verhalten (§. 139.), so verhalten sich auch die Oberflächen regulairer Krpr. gleicher Art (§. 157 ꝛc.), wie die Quadrate ihrer Kanten.

178. Wenn die Oberfl. einer Kugel $= A = 4 R^2 \pi$, die einer andern $= B = 4 r^2 \pi$, (§. 167.), so verhält sich $A \ldots B = R^2 \ldots r^2 = D^2 \ldots d^2 = P^2 \ldots p^2$ (§. 140.) d. h. wie die Quadrate der Halbmesser, Durchmesser oder Umfänge.

Anm. Aus §. 165 folgt, daß sich 2 Zonen einer und ebenderselben Kugel wie die Dicken der Kugelscheiben, die sie begrenzen, verhalten.

179. Vergleicht man die Fläche einer Kugel mit der eines um dieselbe gedachten Cylinders Fig. 37. gfik, so ist

1) die Fläche der Kugel $= 4 r^2 \pi$ (§. 167.), die Seitenfl. des Cyl. aber $= 2 r^2 \pi$. if

(§. 152.) = $4r^2\pi$, mithin beide einander gleich.

2) Da aber die Grund- und Oberfl. des Cyl. zusammen = $2r^2\pi$ (§. 124.), mithin die ganze Fl. des Cyl. = $6r^2\pi$, so verhält sich die Kugelfl. zu der eines um die K. gedachten Cyl. = $4r^2\pi$ .. $6r^2\pi$ = 4..6=2..3.

180. Denkt man sich endlich nun die Kugel auch einen Kegel, Fig. 37. abd, so daß ad = db = ab, so ist die Grundfl. desselben = $ae^2\pi$ (§. 124.) und die Seitenfl. = ae. π. ad (§. 154.), folgl. die ganze Fl. = ae. π (ae + ad) = $3ae^2\pi$, (weil ad = 2 ae). Ferner ist $ad^2 - ae^2 = 3ae^2 = ed^2$ (§. 98, 2), und da $\triangle$ dcm $\sim \triangle$ ade, (§. 94, 1) so ist dc .. cm = ad .. ae = 2..1, folgl. dc = 2 cm = 2. r, mithin de = 3 r, und $de^2 = 9r^2$, daher $ae^2 = 3r^2$. Also ist die ganze Fläche = $9r^2\pi$. Es verhalten sich mithin die Flächen einer Kugel, eines um sie gedachten Cylinders und eines dergleichen gleichseitigen Kegels zu einander wie 4 .. 6 .. 9 = 2^2 .. 2. 3 .. 3^2.

B. Von den Körperräumen in Hinsicht des Inhalts oder Größe.

1) Von dem Inhalte einzelner Körperräume.

181. Aus denselben Gründen, aus welchen ein Quadrat von bestimmter Seite das Maaß des Flächenraums ist (§. 112.), ist das Maaß

für den Körperraum ein Kubus oder Würfel (§. 151.) Denkt man sich eine Kante desselben, als Fig. 29. ab in n gleiche Theile getheilt, so ist die Grundfl. = abcd = n^2 (§. 112.); daher lassen sich auch auf derselben n. n an einanderliegende gleiche Würfel denken (§. 151), Da aber ae auch = n, so sind auch n dergleichen Würfelschichten über einander möglich, mithin der Inhalt des Kubus = n^3. In Beziehung auf §. 42. ist daher

nach Decimalmaaße	nach Duodecimalmaaße.
1C.R. = 10^3 = 1000C.F.	1C.R. = 12^3 = 1728C.F.
1C.F. = 10^3 = 1000C.Z.	1C.F. = 12^3 = 1728C.Z.
1C.Z. = 10^3 = 1000C.L.	1C.Z. = 12^3 = 1728C.L.rc.

Die Verwandlung beider Arten von Maaßen geschieht ebenfalls nach der Regeldetri (I. §. 109, a, 2).

182. Auf gleiche Weise läßt sich auf der Grundfl. eines jeden prismatischen Krprs eine gewisse Anzahl gleicher Würfel, und so viel gleiche Schichten über einander annehmen, als die Höhe desselben beträgt. Ist allgemein die Grundfl. = G, die Höhe = H, so ist der Inhalt des Prismas = G. H.

183. In sofern der Cylinder auch zu den prismatischen Krprn gehört (§. 152.), ist sein Inhalt auch gleich dem Produkte aus der Grundfl. und Höhe = G H (§. 182.) = $\frac{1}{4}d^2\pi$. H = $r^2\pi$. H = $\frac{p^2}{4\pi}$. H (§. 124).

Digitized by Google

Anm. Ist $H = d$, so ist der Inhalt des Cyl. $= \frac{1}{4} d^3 . \pi = 2 r^3 \pi = \frac{1}{4} \frac{p^3}{\pi^2}$ (§. 91, 2).

184. Da sich jedes n-seitige Prisma in $(n-2)$ 3seitige von gleicher Höhe theilen läßt (§. 150.), so müssen die Inhalte der letzteren von den Größen der $\triangle\triangle$ abhängen, in welche die Grundfl. getheilt ist. Sind diese einander gleich, so müssen auch die $(n-2)$ 3seit. Prismata einander gleich seyn.

185. Nach §. 182. ist das 3seitige Prisma Fig. 38. $= \frac{1}{2}$ ab. ck. bd. Nun sei ab $=$ de $=$ m, ck $=$ fi $=$ n, bd $=$ cf $=$ h, so ist das Pr. $= \frac{1}{2}$ m. n. h $=$ m. h. $\frac{1}{2}$ n $=$ abde. $\frac{1}{2}$ n (§. 113.), d. i. es läßt sich das Pr. auch als ein solches betrachten, dessen Grundfl. abde und dessen Höhe $= \frac{1}{2}$ ck ist.

186. Denkt man sich in dem Prisma Fig. 38. eine Ebene durch f, a, b, so wird es in eine Piramyde abcf und das keilförmige Stück abdef getheilt. Nun sei abdef $= \frac{1}{x}$ des ganzen Prismas, folg. $= \frac{\text{m. h. } \frac{1}{2} \text{ n}}{x}$ (§. 185) $= \frac{\text{m. n. h}}{2x}$ so ist die Pir. abcf $= \frac{\text{m. n. h}}{2} - \frac{\text{m. n. h}}{2x}$ $= \text{m. n. h} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2x}\right)$. Denkt man sich auch eine Ebene durch f, e, b so ist, weil $\triangle$ abc $=$ $\triangle$ edf, und cf $=$ bd; abcf $=$ defb

$= \frac{bd.\ ed}{2} \cdot \frac{\frac{1}{r}fi}{x}$ (§. 117.) $= \frac{\frac{1}{2}m.\ h.\ \frac{1}{r}n}{x}$ (§. 185.)

$= \frac{m.\ n.\ h}{4x} = m.\ n.\ h\ (\frac{1}{4} - \frac{1}{2x})$. Daraus folgt, daß $\frac{1}{4x} = (\frac{1}{4} - \frac{1}{2x})$ und $\frac{3}{4x} = \frac{1}{4}$, endl. $\frac{1}{x} = \frac{2}{3}$. Es ist daher abdef $= \frac{2}{3}$ des Prismas folgl. abcf $= \frac{1}{3}$ desselben, d. h. die Piramyde ist $= \frac{1}{3}$ eines Prismas von gleicher Grundfl. und Höhe.

Da nun dieser Satz von allen 3seitigen Prismen gilt, in welche sich ein n-seitiges theilen läßt (§. 184.), so ist eine n-seitige Piramyde, deren Grundfl. $= G$ und deren Höhe $= H$ ist, $= \frac{1}{3}$ GH.

187. In sofern sich ein Kegel als eine Piramyde betrachten läßt (§. 154.), so ist sein Inhalt ebenfalls $= \frac{1}{3}$ GH (§. 186.) $= \frac{1}{12} d^2 \pi H = \frac{1}{3} r^2 \pi H = \frac{1}{12} \frac{P}{\pi} . H$ (§. 183).

188. Bei der abgekürzten Piramyde Fig. 33. aq sei $\triangle$ abd $= G$, ec $= H$, $\triangle$ suq $= g$, ev $= h$, so ist abde $= \frac{1}{3}$ GH, und suqe $= \frac{1}{3}$ gh, folgl. aq $= \frac{1}{3}$ (GH $-$ gh). Nun ist aber $\triangle$ abd $\sim \triangle$ suq (§. 94, 3.), mithin $G . . g = ab^2 . . su^2$ (§. 137.) $= ae^2 . . se^2 = ec^2 . . ve^2 = H^2 . . h^2$; folgl. $h^2 = \frac{H^2 . g}{G}$, und

$h = H\frac{\sqrt{g}}{\sqrt{G}}$; desgl. $H = h\frac{\sqrt{G}}{\sqrt{g}}$. Daher ist

1) $aq = \frac{1}{3}h\left(\frac{G\sqrt{G} - g\sqrt{g}}{\sqrt{g}}\right) =$

$\frac{1}{3}H\left(\frac{G\sqrt{G} - g\sqrt{g}}{\sqrt{G}}\right)$.

2) die Höhe des abgestumpften Stücks $= ks = ce - ve = H - h$ sei $= m$. Da nun $G \,..\, g = H^2 \,..\, h^2$, so ist $\sqrt{G} \,..\, \sqrt{g} = H \,..\, h$, und $(\sqrt{G} - \sqrt{g}) \,..\, \sqrt{g} = (H - h) \,..\, h = m \,..\, h$, folgl. $h = \frac{m\sqrt{g}}{\sqrt{G} - \sqrt{g}}$; desgl. $\sqrt{G} \,..\, (\sqrt{G} - \sqrt{g}) = H \,..\, H - h = H \,..\, m$, folgl. $H = \frac{m\sqrt{G}}{\sqrt{G} - \sqrt{g}}$. Daher ist $aq = \frac{1}{3}m\left(\frac{G\sqrt{G} - g\sqrt{g}}{\sqrt{G} - \sqrt{g}}\right)$.

3) Ferner ist $ab \,..\, su = ac \,..\, sv = ec \,..\, ev = H \,..\, h$. Setzt man $ab = a$, $su = b$, so ist $a \,..\, b = H \,..\, h$, desgl. $(a - b) \,..\, b = (H - h) \,..\, h = m \,..\, h$, folg. $h = \frac{m \cdot b}{a - b}$; und $a \,..\, (a - b) = H \,..\, (H - h) = H \,..\, m$, folgl. $H = \frac{m \cdot a}{a - b}$.

Endlich $G \,..\, g = a^2 \,..\, b^2$,

folgl. $G = \frac{g \cdot a^2}{b^2}$, $g = \frac{G \cdot b^2}{a^2}$.

Digitized by Google

Daraus folgt $aq = \frac{1}{3} G m \left(\frac{a}{a-b} - \frac{b^3}{a^2(a-b)}\right)$

$= \frac{1}{3} G m \left(1 + \frac{b}{a} + \frac{b^2}{a^2}\right)$.

4) Aus ebendenselben Formeln ergiebt sich auch

$aq = \frac{1}{3} g m \left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{a}{b} + 1\right)$.

189. In dem abgekürzten Kegel Fig. 34. af, sei $ac = R$, $iq = r$, $ik = m$, $ce = H$, $eq = h$, so ist $R \,..\, r = H \,..\, h$, folgl. auch $(R - r) \,..\, r = (H - h) \,..\, h = m \,..\, h$, mithin $h = \frac{m.\ r}{R - r}$; und auf gleiche Weise $H = \frac{m.\ R}{R - r}$. Es ist aber $G = R^2\pi$, $g = r^2\pi$. Substituirt man diese Ausdrücke in die Form $\frac{1}{3}$ (G.H − gh) (§. 188.), so ist $af = \frac{1}{3}\left(\frac{R^2\pi.\ m.\ R}{R - r} - \frac{r^2\pi.\ m.\ r}{R - r}\right) = \frac{1}{3} m\pi \left(\frac{R^3 - r_3}{R - r}\right) =$

$\frac{1}{3} m.\pi(R^2 + Rr + r^2) = \frac{1}{12} m.\pi(D^2 + D.d + d^2)$

$= \frac{m}{12.\pi}(P^2 + P.p + p^2)$.

Anm. Dasselbe findet sich auch aus den Formeln §. 188, 2, 3, 4.

190. Da das Tetraëdron eine Piramyde ist, (§. 157.) so ist sein Inhalt $= \frac{1}{3} G H$. Fig. 33. würde ein solches seyn, wenn $ab = ae = bd$ ꝛc. Nun ist aber $G = \frac{1}{4} ab^2 \sqrt{3}$ (§. 157.), und es findet sich durch Rechnung $H = ce = \frac{1}{3} ab. \sqrt{6}$.

Digitized by Google

Daher der Inhalt $= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} ab^2 \sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} ab \cdot \sqrt{6} = \frac{1}{12} ab^3 \sqrt{2}$.

191. Das Oktaëdron (§. 158.) läßt sich als aus 2 4-seitigen Piramyden bestehend ansehen, deren gemeinschaftl. Grundfl. $= ab^2$, wenn eine Kante $= ab$, und die gleichen Höhen $= \frac{1}{2} ab \cdot \sqrt{2}$. Daher der Inhalt $= \frac{1}{3} ab^3 \sqrt{2}$.

192. Das Ikosaëdron (§. 159, 2.) ist $=$ 20 Tetraëdern, deren Spitzen in dem Mittelp. zusammenstoßen. Durch Rechnung findet sich sein Inhalt $= \frac{5}{12} ab^3 \sqrt{(3 + \sqrt{5})}$.

193. Der Inhalt des Hexaëdrons (§. 160.) Fig. 29. ist $= ab^3$ (vergl. §. 181.)

194. Der Inhalt des Dekaëdrons (§. 161.) ist $=$ 12 Piramyden, deren Grundflächen regulaire 5-ecke sind, und deren Spitzen im Mittelpunkte zusammentreffen, und findet sich $= \frac{1}{4} ab^3 \sqrt{\left(\frac{235 + 105\sqrt{5}}{2}\right)}$.

195. Auf ebendieselbe Weise wird die Kugel als der Inbegriff einer Menge Piramyden betrachtet, deren Grundflächen zusammen der Kugelfläche gleich (§. 162.) $= 4r^2\pi$ (§. 167.) und deren Höhe $= r$. Es ist daher der Inhalt der Kugel $= \frac{4}{3} r^3 \pi = \frac{1}{6} d^3 \pi = \frac{p^3}{6\pi^2}$.

196. Aus gleichem Grunde ist ein Kugelausschnitt Fig. 35. wsoc $= \frac{2}{3} r^2 \pi$. is. (§. 166).

197. Einen Kugelabschnitt, Fig. 35. osw findet man daraus, wenn man von dem Aus-

Digitized by Google

schnitte wsoc den Kegel woc $= \frac{1}{3} iw^2 \pi . ci$ (§. 187.) abzieht. Es ist daher osw $= \frac{1}{3} r^2 \pi . is - \frac{1}{3} iw^2 \pi . ci = \frac{1}{3} \pi (2 r^2 . is - iw^2 . ci) = is^2 . \pi (r - \frac{1}{3} is)$, indem $ic = r - is$, und $iw^2 = (2 r - is) is$ (§. 96).

Anm. Wenn r unbekannt ist, aber iw und is gemessen werden können, so findet man r nach §. 164. Anm.

2. Vergleichung der Körperräume.

198. Da 2 oder mehrere Körperräume einander entweder gleich oder ungleich seyn müssen, (§. 13, 2, a.) so ist zu untersuchen, theils unter welchen Bedingungen ihre Gleichheit statt findet, theils in welchem Größenverhältnisse ungleiche zu einander stehen. Die zu vergleichenden Körper mögen A und B heißen.

a. Bedingungen der Gleichheit d. K.

199. Im allgemeinen ist $A = B$, wenn das Produkt der Faktoren, welches den Inhalt von A giebt, dem von B gleich ist.

200. Sind nun A und B prismatische Körper, und $A = GH$, $B = gh$ (§. 182), so ist $A = B$ wenn $GH = gh$ oder wenn $G . . g = h . . H$. Daher ist auch $A = B$, wenn $G = g$, $H = h$, d. h. alle Prismen sind einander gleich, wenn sie gleiche Grundfl. und gleiche Höhe haben.

Anm. Dieser Satz gilt auch bei Vergleichung gerader und schiefstehender Prismen, als Fig. 30. bk und an. Dann denkt man

Digitized by Google

sich beide in eine Menge sehr dünner Scheiben mit der Grundfl. prllel. durchschnitten, so erhält man von beiden gleichviel gleichgroße Scheiben, weil sie gleiche Länge und Breite haben (§. 131.)

201. Sind A und B Cylinder, und $A = R^2\pi . H$, $B = r^2\pi . h$ (§. 183.), so ist $A = B$, wenn $R^2\pi H = r^2\pi h$ oder $R^2 H = r^2 h$, oder $R^2 \,..\, r^2 = h \,..\, H$. Daher ist auch $A = B$, wenn $R = r$, $H = h$, d. h. Cylinder sind gleich, wenn sowohl die Halbmesser ihrer Grundfl. als auch ihre Höhen einander gleich sind.

202. Sind A und B piramydalische Körper und $A = \frac{1}{3}GH$, $B = \frac{1}{3}gh$ (§. 186.), so ist $A = B$, wenn $\frac{1}{3} GH = \frac{1}{3}gh$, oder $G . H = gh$, oder wenn $G \,..\, g = h \,..\, H$. Daher auch $A = B$, wenn $G = g$, $H = h$ (vergl. §. 200).

Anm. Dieser Satz gilt auch von schiefstehenden Piramyden von gleicher Grundfl. und gleicher Höhe. S. §. 200. Anm.

203. Aus §. 190 — 195 ergiebt sich, daß 2 regulaire Körper einander gleich sind, wenn sie gleiche Kanten oder gleiche Halbmesser haben.

b. Vergleichung ungleicher Körper in Hinsicht ihrer Gehalte.

204. Im allgemeinen verhalten sich ungleiche Körper wie die Produkte aus den Factoren,

Digitized by Google

welche ihren Inhalt geben (§. 181. ꝛc.) z. B. A . . B = GH . . gh. Ist ein Factor von A einem von B gleich, so verhalten sich A und B wie die übrigen Factoren; sind aber solche in A und B proportional, so ergiebt sich ihr Verhältniß in folgenden §§.

205. Wenn A und B prismatische Körper sind, so verhält sich

1) im allgemeinen A . . B = GH . . gh,
2) wenn die Grundfl. gleich, G = g, so ist A . . B = H . . h; und wenn H = h, A . . B = G . . g.
3) wenn G . . g = H^2 . . h^2, wo A ∾ B (§. 173.), so ist A . . B = H^3 . . h^3.

206. Sind A und B Cylinder, so verhält sich

1) im allgemeinen A . . B = $R^2\pi$. H . . $r^2\pi$. h = R^2H . . r^2h.
2) wenn R = r, A . . B = H . . h, und wenn H = h, A . . B = R^2 . . r^2 = D^2 . . d^2 = P^2 . . p^2.
3) wenn R . . r = H . . h, so verhält sich A . . B = H^3 . . h^3 = R^3 . . r^3 = D^3 . . d^3 = P^3 . . p^3.

Anm. Auf N. 2. beruht die Einrichtung der Werkzeuge, womit man den Inhalt der Fässer untersuchen kann, Visirstäbe genannt.

207. Sind A und B piramydalische Körper, so verhält sich A . . B = $\frac{1}{3}$GH . . $\frac{1}{3}$gh (§. 186.) = GH . . gh, daher von ihnen alle Sätze §. 205 gelten. Aus gleichem Grunde finden, wenn A und B Kegel sind, die Sätze §. 206. statt.

Digitized by Google

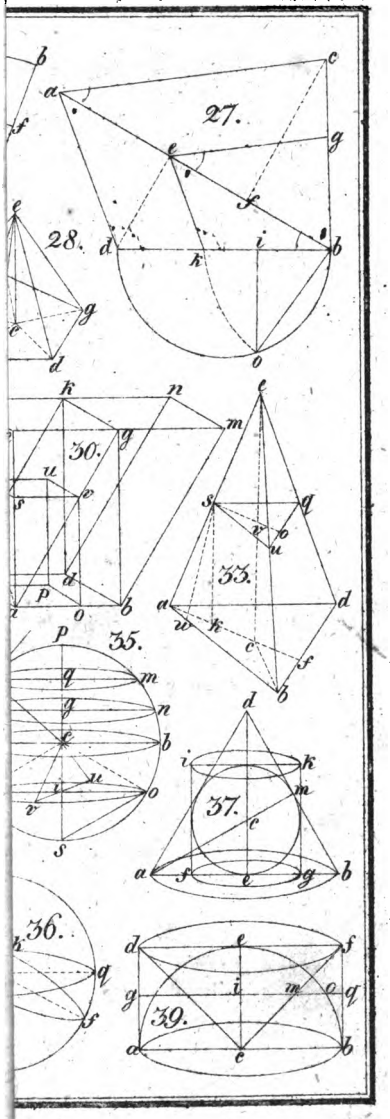
208. Wenn A und B regulaire Körper gleicher Art sind (§. 190 — 194.), so verhalten sie sich, wie die Cubiczahlen ihrer Kanten.

209. Sind A und B Kugeln, und $A = \frac{1}{6}D^3\pi$, $B = \frac{1}{6}d^3\pi$, (§. 195.) so verhält sich $A..B = D^3..d^3 = R^3..r^3 = P^3..p^3$.

210. Endlich ist noch wichtig, die letzten Glieder (§. 162.) der 3 Hauptklassen von Körperräumen (§. 149.) Cylinder, Kegel und Kugel von der Beschaffenheit zu vergleichen, daß die Grundflächen der erstern einem größten Kreise der letztern, und die Höhen jener dem Durchmesser der letztern gleich sind. Es sei daher der Cylinder $C = \frac{1}{4}D^2\pi . D$ (§. 183.) $= \frac{1}{4}D^3\pi$, die Kugel $K = \frac{1}{6}D^3\pi$ (§. 195.), der Kegel $k = \frac{1}{12}D^3\pi$ (§. 187.), so verhält sich $C..K..k = \frac{1}{4}..\frac{1}{6}..\frac{1}{12} = 3..2..1$.

Anm. Dieses Verhältniß hat Archimedes auf folgende sinnreiche Art bewiesen. Es sei Fig. 39. aebca die Hälfte einer Kugel, abdf ein darum beschriebener Cylinder, und dcf ein Kegel von gleicher Grundfl. und Höhe mit ihm. Denkt man sich alle 3 Körper in n sehr dünne Scheiben zerschnitten, als gq, so ist der Cylinder $C = n.iq^2\pi$, die Kugel $K = n.io^2.\pi$, der Kegel $k = n.im^2\pi$. Es ist aber $iq = co$, und weil $\triangle cef \sim \triangle cim$, und $ec = ef$, so ist $im = ci$. Daher ist auch $C = n.co^2\pi$, $k = n.ci^2\pi$. Da nun $co^2 = io^2 + ic^2$ (§. 97.), so ist auch $n.co^2\pi = n.io^2\pi + n.ci^2.\pi$ oder $C = K + k$. Endlich ist aber $k = \frac{1}{3}C$ (§. 187.), mithin $K = \frac{2}{3}C$, woraus folgt $C..K..k = 3..2..1$.

Digitized by Google



Digitized by Google

Digitized by Google